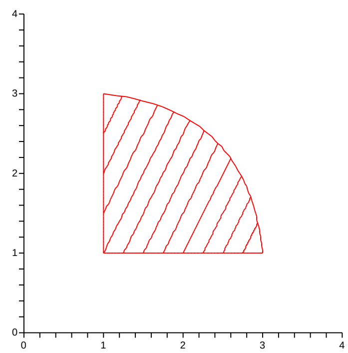
Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
L. Larsson, A. Strömbergsson

Prov i matematik
Matematik MN2
2004-10-27

FACIT TILL PROBLEM 10.

• 10.



Det givna området.

"Standardlösning" med Lagrangemultiplikator:

Eftersom funktionen $f(x,y)$ är kontinuerlig och vi studerar den på ett slutet, begränsat område, så vet vi från en känd sats (Theorem 2, s.784 i boken) att $f(x,y)$ *antar* ett globalt maximum i någon punkt i det givna området, och att $f(x,y)$ antar ett globalt minimum i någon punkt i det givna området. Vi vet också att den/de punkter där detta inträffar måste vara kritiska punkter till $f(x,y)$, singulära punkter till $f(x,y)$, eller randpunkter till området. Observera att $f(x,y)$ inte har några singulära punkter.

Vi börjar med att söka kritiska punkter till $f(x,y)$ inuti området, dvs punkter där $\nabla f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ är nollvektorn. Vi beräknar:

$$f_1(x,y) = \frac{y(x+2y)^2 - xy \cdot 2(x+2y)}{(x+2y)^4} = \frac{yx + 2y^2 - 2xy}{(x+2y)^3} = \frac{y(2y-x)}{(x+2y)^3},$$

$$f_2(x,y) = \frac{x(x+2y)^2 - xy \cdot 4(x+2y)}{(x+2y)^4} = \frac{x^2 + 2xy - 4xy}{(x+2y)^3} = \frac{x(x-2y)}{(x+2y)^3}.$$

Eftersom $x \geq 1$ och $y \geq 1$ i vårt område så gäller att den enda möjligheten för båda ovanstående uttryck att bli noll är att faktorn $2y - x$ blir 0, dvs $x = 2y$. Alla punkter på denna linje är kritiska punkter, och vi ser att denna linje går genom vårt område; alltså finns oändligt många kritiska punkter inuti vårt område.

Värdet i varje sådan kritisk punkt:

$$f(2y, y) = \frac{2y^2}{(2y + 2y)^2} = \frac{1}{8}.$$

Det återstår att undersöka randen till området. Denna rand består av tre kurvor:

Kurva 1: $x = 1$, $1 \leqq y \leqq 3$. Denna kurva är naturligt parametriserad av y-variabeln. Vi ska alltså studera funktionen $g(y) = f(1, y)$ för $1 \leqq y \leqq 3$. Nu är $g'(y) = f_2(1, y)$, och ur ovanstående formel för $f_2(x, y)$ ser vi att $f_2(1, y) = \frac{(1-2y)}{(1+2y)^3} < 0$ för alla $1 \leqq y \leqq 3$. Alltså är $g(y)$ avtagande för $1 \leqq y \leqq 3$. Det största värdet som vår funktion antar på kurva 1 är alltså $g(1) = f(1, 1) = 1/9$ och det minsta värdet är $g(3) = f(1, 3) = 3/49$.

Kurva 2: $y = 1$, $1 \leqq x \leqq 3$. Denna kurva är naturligt parametriserad av x-variabeln. Vi ska alltså studera funktionen $h(x) = f(x, 1)$ för $1 \leqq x \leqq 3$. Nu är $g'(x) = f_1(x, 1)$, och ur ovanstående formel för $f_1(x, y)$ ser vi att $f_1(x, 1) = \frac{(2-x)}{(x+2)^3}$, så att $f_1(x, 1) > 0$ för $1 \leqq x < 2$ och $f_1(x, 1) < 0$ för $2 < x \leqq 3$. Det största värdet som vår funktion antar på kurva 2 är alltså $h(2) = f(2, 1) = 1/8$ och det minsta värdet är $\min(h(1), h(3)) = \min(1/9, 3/25) = 1/9$.

Kurva 3: $x^3 + y^3 = 28$, $1 \leqq x \leqq 3$. På denna kurva analyserar vi situationen med hjälp av Lagrangefunktionen. Bivillkoret ges av $g(x, y) = 0$, där $g(x, y) = x^3 + y^3 - 28$. Alltså är Lagrangefunktionen:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(x^3 + y^3 - 28).$$

De möjliga kandidaterna till lokala extremvärden för $f(x, y)$ begränsad till kurva 3 är alltså:

Ändpunkt (dvs $(1, 3)$ och $(3, 1)$). Koll av värden: $f(1, 3) = \frac{3}{7^2} = \frac{3}{49}$. $f(3, 1) = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$.

Singulär punkt. Finns ej.

Punkt där $\nabla g(x, y) = 0$. Dvs $(3x^2, 3y^2) = (0, 0)$. Det gäller bara i origo, dvs inte för någon punkt på kurvan.

Punkt där $\nabla L(x, y, \lambda) = 0$. Då är:

$$\begin{cases} \frac{y(2y-x)}{(x+2y)^3} + 3\lambda x^2 = 0 \\ \frac{x(x-2y)}{(x+2y)^3} + 3\lambda y^2 = 0 \\ x^3 + y^3 = 28 \end{cases}$$

Antag att (x, y, λ) uppfyller detta, och att (x, y) är en punkt på vår del av kurvan. Eftersom $x > 0$ och $y > 0$ så kan vi lösa ut λ

ur de båda första ekvationerna och få:

$$\lambda = -\frac{y(2y-x)}{3x^2(x+2y)^3} = -\frac{x(x-2y)}{3y^2(x+2y)^3}.$$

Detta medför (vi utnyttjar åter $x > 0$, $y > 0$):

$$\begin{aligned} & y(2y-x)y^2 = x(x-2y)x^2 \\ & \Longrightarrow (y^3+x^3)(2y-x) = 0 \\ & \Longrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2)(2y-x) = 0. \end{aligned}$$

Observera att eftersom $x > 0$ och $y > 0$ så gäller $x^2 \geq xy$ (om $x \geq y$) *eller* $y^2 \geq xy$ (om $y \geq x$), alltså säkert $x^2 - xy + y^2 > 0$. Dessutom är självklart $x + y > 0$. Alltså medför ekvationen ovan att

$$2y - x = 0.$$

Detta kombinerat med tredje ekvationen ger $(2y)^3 + y^3 = 28$, dvs $9y^3 = 28$, och om man åter tittar i ekvationssystemet och utnyttjar $2y = x$ så följer:

$$(x, y, \lambda) = \left(2\sqrt[3]{\frac{28}{9}}, \sqrt[3]{\frac{28}{9}}, 0\right).$$

Omvänt kontrollerar man direkt att denna punkt verkligen uppfyller kraven i vårt ekvationssystem (utnyttja $2y - x = 0$!) och $x \geq 1$, $y \geq 1$.

Alltså finns det precis en punkt på vår kurva där $\nabla L(x, y, \lambda) = 0$, nämligen $(x, y) = \left(2\sqrt[3]{\frac{28}{9}}, \sqrt[3]{\frac{28}{9}}\right)$. Värdet av $f(x, y)$ i denna punkt blir $\frac{1}{8}$ (eftersom punkten uppfyller $x = 2y$).

Vi har ovan funnit alla möjliga kandidater till punkter där $f(x, y)$ kan anta sitt globala maximum och sitt globala minimum. Om vi går igenom motsvarande f-värden så finner vi att det största är $\frac{1}{8}$ och det minsta är $\frac{3}{49}$.

Svar: Det största värdet är $\frac{1}{8}$, det minsta värdet är $\frac{3}{49}$.

Alternativ, bekväm lösning utan Lagrangemultiplikator:
Eftersom $x \geq 1$ och $y \geq 1$ så kan vi utan vidare dividera med x och y. Vi kan alltså skriva om funktionen $f(x, y)$ så här:

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x + 2y)^2} = \frac{xy/y^2}{(x + 2y)^2/y^2} = \frac{x/y}{(x/y + 2)^2}.$$

Vi ser alltså att $f(x, y)$ är en *en-variabel*-funktion av x/y, dvs

$$f(x, y) = g(x/y), \quad \text{där } g(t) = \frac{t}{(t + 2)^2}.$$

Vi beräknar derivatan till $g(t)$:

$$g'(t) = \frac{(t + 2)^2 - 2t(t + 2)}{(t + 2)^4} = \frac{t + 2 - 2t}{(t + 2)^3} = \frac{2 - t}{(t + 2)^3}.$$

Vi ser att detta uttryck är positivt för $0 < t < 2$ och negativt för $t > 2$. Alltså är funktionen $g(t)$ växande för $0 < t < 2$ och avtagande för $t > 2$.

Alltså är $f(x, y)$ som störst när $x/y = 2$ och som minst antingen när x/y har sitt minsta värde eller när x/y har sitt största värde. Vi finner att $x/y = 2$ gäller för många punkter i vårt område, t.ex. för punkten $(x, y) = (1, 2)$.

Vidare ser man lätt i figur (se figuren nedan) att det största värdet som x/y antar i vårt område är 3, och det minsta värdet är $1/3$. [Mer stringent, utan hänvisningen "man ser i figur", kan detta bevisas så här: Om $x \geq 1$, $y \geq 1$ och $x^3 + y^3 \leq 28$ så är $x \leq \sqrt[3]{28 - y^3} \leq \sqrt[3]{27} = 3$ och analogt $y \leq 3$. Alltså är $x/y \leq 3/1$ (ty täljaren är ≤ 3 och nämnaren är ≥ 1) och $x/y \geq 1/3$ (ty täljaren är ≥ 1 och nämnaren är ≤ 3). Vi kontrollerar att kvoterna 3 och $1/3$ verkligen uppnås i vårt område, för $(x, y) = (3, 1)$ respektive $(x, y) = (1, 3)$. (Dessa punkter ligger i vårt område eftersom $1 \geq 1$ och $3 \geq 1$ och $1^3 + 3^3 \leq 28$.)]

Alltså är det minsta värdet som $f(x, y)$ antar i vårt område likamed det minsta av talen $g(3)$ och $g(1/3)$. Vi räknar ut:

$$g(3) = \frac{3}{25}; \qquad g(1/3) = \frac{13}{(7/3)^2} = \frac{3}{49}.$$

Det minsta värdet är alltså $g(1/3) = \frac{3}{49}$.

Svar: Det största värdet är $\frac{1}{4}$, det minsta värdet är $\frac{3}{49}$.