Lösning till inlupp 2:3.

Enligt en sats som jag har nämnt på föreläsningen (jfr boken s.41, Thm 3.10) är

$$H_r(\mathcal{S}) \leqq \log_r 6.$$

(Likhet gäller här om och endast om $p_1 = p_2 = ... = p_6 = \frac{1}{6}$. Eventuellt skulle man kunna säga att uppgiftsformuleringen – tärningen är "ojämn" – säger att $p_1 = p_2 = ... = p_6 = \frac{1}{6}$ *inte kan inträffa;* dvs att vi faktiskt har $H_r(\mathcal{S}) < \log_r 6$ men $H_r(\mathcal{S})$ kan komma godtyckligt nära $\log_r 6$.)

Vi söker nu *minsta* möjliga värdet på $H_r(\mathcal{S})$. Vi ska utnyttja det faktum som jag har sagt på en föreläsning, att för varje konstant $0 < A \leqq 1$ gäller att funktionen

$$f_A(x) := -x \log_r x - (A - x) \log_r(A - x)$$

är strikt växande för $0 \leqq x \leqq \frac{A}{2}$ och strikt avtagande för $\frac{A}{2} \leqq x \leqq A$. (Repetera beviset av detta!)

Det är givet i formuleringen att $p_j \geqq 0.1$ gäller för $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. *Antag att det finns två index $i \neq k$ för vilka $p_i > 0.1$, $p_k > 0.1$!* Sätt $A = p_i + p_k$; då har vi

$$H_r(\mathcal{S}) = -\sum_{j=1}^{6} p_j \log_r p_j = f_A(p_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i,k}}^{6} p_j \log_r p_j.$$

(Obs $f_A(p_i) = f_A(p_k)$.) Genom att eventuellt byta namn $i \leftrightarrow k$ kan vi anta att $p_i \leqq p_k$, dvs att $p_i \leqq \frac{A}{2}$. Eftersom $0.1 < p_i$ och $f_A(x)$ är strikt växande för $0 \leqq x \leqq \frac{A}{2}$ så är då $f_A(p_i) > f_A(0.1)$. Detta visar att entropin $H_r(\mathcal{S})$ *minskar* om vi sätter $p_i^{(ny)} = 0.1$ och $p_k^{(ny)} = A - 0.1 = p_i + p_k - 0.1$ medan alla andra p_j hålls fixa! Detta resonemang kan sedan upprepas så länge som det finns minst två tal bland $p_1, p_2, ..., p_6$ som är > 0.1! För varje steg kommer fler av dessa tal att bli $= 0.1$, så till slut måste alla utom ett av talen vara $= 0.1$, dvs $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ är likamed $0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.5$ i någon ordning. När detta gäller får vi

$$H_r(\mathcal{S}) = -5 \cdot 0.1 \cdot \log_r 0.1 - 0.5 \cdot \log_r 0.5 = -0.5 \cdot \log_r 0.05 = \frac{1}{2} \cdot \log_r 20.$$

Detta resonemang visar att det minsta möjliga värdet på $H_r(\mathcal{S})$ är $\frac{1}{2} \cdot \log_r 20$, och att detta värde erhålls om och endast om $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ är likamed $0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.5$ i någon ordning.