• 4. Låt beslutsregeln $\Delta : \mathbb{Z}_2^8 \to \mathcal{C}$ vara *syndrom-avkodering*, där vi använder följande tabell över restklassledare och syndromer för koden:

restklassledare	syndrom
$v_1 = 00000000$	0000
$v_2 = 00000001$	0001
$v_3 = 00000010$	0010
$v_4 = 00000100$	0100
$v_5 = 00001000$	1000
$v_6 = 00010000$	0111
$v_7 = 00100000$	1011
$v_8 = 01000000$	1101
$v_9 = 10000000$	1110
$v_{10} = 00000011$	0011
$v_{11} = 00000101$	0101
$v_{12} = 00001001$	1001
$v_{13} = 00000110$	0110
$v_{14} = 00001010$	1010
$v_{15} = 00001100$	1100
$v_{16} = 10000001$	1111

Antag att kodordet $u \in \mathbb{Z}_2^8$ sänds och att kanalen ger utdata $v \in \mathbb{Z}_2^8$. Om $d(u,v) \leqq 1$ (dvs noll eller en bokstav förvanskas av kanalen) så får vi säkert korrekt avkodering $\Delta(v) = u$ eftersom koden rättar $t = [(d-1)/2] = 1$ fel. Antag nu att $d(u,v) = 2$; då är $v = u + v'$ för något ord $v' \in \mathbb{Z}_2^8$ med vikt $wt(v') = 2$. Observera att om v' är likamed någon av restklassledarna v_j, $10 \leqq j \leqq 16$ så blir syndromet för v:

$$vH^T = (u + v_j)H^T = uH^T + v_jH^T = (0,0,0,0) + v_jH^T,$$

dvs samma syndrom som för ordet v_j, och detta betyder att syndromavkodning ger

$$\Delta(v) = v - v_j = (u + v_j) - v_j = u,$$

dvs korrekt avkodning!

(Om däremot v' *inte* är likamed någon av restklassledarna v_j, $10 \leqq j \leqq 16$, så blir avkodningen *säkert fel*, ty antag att v_k är den unika restklassledare som har samma syndrom som $v = u + v'$ och därmed samma syndrom som v'. Då måste $v' \neq v_k$, vi antar ju $wt(v') = 2$ och $v' \notin \{v_{10}, v_{11}, ..., v_{16}\}$; alltså ger syndromavkodning $\Delta(v) = v - v_k = u + v' - v_k \neq u$, dvs felaktig avkodning.)

Alltså: Vi får korrekt avkodning i *sju* av de $\binom{8}{2} = 28$ fall där två bokstäver förvanskas! Alltså blir maximala felsannolikheten

$$Slh_M = 1 - \binom{8}{0} 0.95^8 - \binom{8}{1} 0.95^7 0.05^1 - 7 \cdot 0.95^6 0.05^2 < 0.045.$$