Tenta 2002-05-31, lösningsskisser

1. Vi beräknar $2^{-2}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-3}+2^{-3}+2^{-4}+2^{-4}=1$. Eftersom detta är $\leqq 1$ så säger Krafts olikhet att *det finns* en binär prefixfri kod med ordlängder $(2,2,3,3,3,4,4)$.

Exempel på sådan kod: $00, 01, 100, 101, 110, 1110, 1111$.

Andra fallet: Vi beräknar $2^{-2}+2^{-2}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-3}+2^{-4}+2^{-4}=9/8$. Eftersom detta är >1 så säger Krafts olikhet att *det inte finns* en binär prefixfri kod med ordlängder $(2,2,2,3,3,4,4)$.

2. Binära entropin: $H_2(\mathcal{S}) = -0.3\cdot\log_2 0.3 - 0.3\cdot\log_2 0.3 - 0.2\cdot\log_2 0.2 - 0.1\cdot\log_2 0.1 - 0.08\cdot\log_2 0.08 - 0.02\cdot\log_2 0.02 = 2.2431434...$

Vi bestämmer nu en optimal binär kod för $\mathcal{S}$. Vi vet att varje Huffmankod är optimal, alltså räcker det att bestämma en Huffmankod för $\mathcal{S}$:

					0.3	0.3	0.2	0.1	0.08	0.02
				0.1	0.3	0.3	0.2	0.1		
			0.2		0.3	0.3	0.2			
		0.4			0.3	0.3				
	0.6	0.4								
1										

Härifrån kan vi genast läsa av att medelordlängden för denna kod blir $L(\mathcal{C}) = 1+0.6+0.4+0.2+0.1 = 2.3$. (Vi behöver ej bestämma kodorden i $\mathcal{C}$...)

Svar: Medelordlängden för en optimal binär kod för $\mathcal{S}$ är 2.3.

Vi studerar härnäst binär Shannon-Fano-kod för $\mathcal{S}$. Enligt definition ska ordlängderna vara $\ell_j = [-\log_2 p_j$, avrundat uppåt till närmaste heltal], där $p_1 = 0.3, ..., p_6 = 0.02$ är sannolikheterna för $\mathcal{S}$. Alltså: $\ell_1 = \ell_2 = 2$, $\ell_3 = 3$, $\ell_4 = \ell_5 = 4$, $\ell_6 = 6$. Medelordlängden för denna kod blir $L(\mathcal{C}) = \sum_{j=1}^{6} \ell_j \cdot p_j = 2.64$.

3. Ternära entropin blir $H_3(\mathcal{S}) = -0.3\cdot\log_3 0.3 - 0.25\cdot\log_3 0.25 - 0.15\cdot\log_3 0.15 - 0.1\cdot\log_3 0.1 - 0.1\cdot\log_3 0.1 - 0.04\cdot\log_3 0.04 - 0.03\cdot\log_3 0.03 - 0.03\cdot\log_3 0.03 = 1.6311477...$

Vi bestämmer nu en optimal ternär kod för $\mathcal{S}$. Vi vet att varje Huffmankod är optimal, alltså räcker det att bestämma en Huffmankod för $\mathcal{S}$.

(Kom ihåg att man måste lägga till "dummy"-symboler tills antalet symboler är $\equiv 1 \pmod{r-1}$, där nu $r=3$. Vi måste alltså lägga till EN dummy-symbol.)

$\mathcal{S}$					0.3	0.25	0.15	0.1	0.1	0.04	0.03	0.03	0
$\mathcal{S}'$				0.06	0.3	0.25	0.15	0.1	0.1	0.04			
$\mathcal{S}''$			0.2		0.3	0.25	0.15	0.1					
$\mathcal{S}^{(3)}$		0.45			0.3	0.25							
$\mathcal{S}^{(4)}$	1												

Vi bestämmer nu kodorden genom att arbeta bäklänges i ovanstaände tabell:

$\mathcal{S}$					1	2	01	02	001	002	0000	0001	*
$\mathcal{S}'$				000	1	2	01	02	001	002			
$\mathcal{S}''$			00		1	2	01	02					
$\mathcal{S}^{(3)}$		0			1	2							
$\mathcal{S}^{(4)}$	ε												

En optimal kod är alltså $\mathcal{C} = \{1, 2, 01, 02, 001, 002, 0000, 0001\} \subset \{0, 1, 2\}^+$, med kodorden i denna ordning svarande mot den givna ordningen på sannolikheterna. Medelordlängden för denna kod blir $L(\mathcal{C}) = 0.06 + 0.2 + 0.45 + 1 = 1.71$.

4. Vi använder samma metod som i beviset av Krafts olikhet.

Välj ett tal $n > \max(\ell_1, \ell_2, ..., \ell_q)$. Varje ord $w \in T^n$ har *högst* ett prefix som tillhör koden $\mathcal{C}$, eftersom $\mathcal{C}$ är prefix-fri. Vidare ser vi ur den givna definitionen av "uttömmande" (exhaustive) att $\mathcal{C}$ är uttömmande om och endast om varje ord $w \in T^n$ har *precis* ett prefix som tillhör koden $\mathcal{C}$. (Det är naturligt att tänka på dessa påstaänden i "trädet" T^*, som jag har definierat på en föreläsningen. Men nu, i nästa steg, utnyttjar vi en lite annan graf...)

Vi kan representera denna situation genom att rita en bipartit graf: Låt grafens noder vara orden i T^n samt orden i $\mathcal{C}$, och drag en kant mellan $w \in T^n$ och $u \in \mathcal{C}$ om och endast om u är ett prefix till w. Detta är en bipartit graf eftersom $T^n \cap \mathcal{C} = \emptyset$ och vi inte har några kanter mellan två $\mathcal{C}$-noder eller mellan två T^n-noder. Enligt vad vi ovan har sagt så går det *högst en* kant till varje T^n-nod, och $\mathcal{C}$ är uttömmande om och endast om det går *precis* en kant till varje T^n-nod. Alltså är *totala antalet kanter* i vår bipartita graf

$$\leqq |T^n| = q^n,$$

med likhet om och endast om $\mathcal{C}$ är uttömmande.

MEN: För varje kodord $u \in \mathcal{C}$, om u har längd ℓ så finns det precis $q^{n-\ell}$ ord i T^n som har u som prefix; alltså har noden u precis $q^{n-\ell}$ kanter i vår bipartita graf. Alltså är totala antalet kanter $= \sum_{j=1}^{q} r^{n-\ell_j}$.

Vi har därmed visat

$$\sum_{j=1}^{q} r^{n-\ell_j} \leqq q^n,$$

med likhet om och endast om $\mathcal{C}$ är uttömmande. Dividera detta med q^n. Vi har då bevisat att:

$$\sum_{j=1}^{q} r^{-\ell_j} \leqq 1,$$

med likhet om och endast om $\mathcal{C}$ är uttömmande.

Därmed har vi löst problemet (och samtidigt återbevisat ena halvan av Krafts olikhet!).

5. Utdata-sannolikheterna blir:

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.46 & 0.54 \end{pmatrix}.$$

(dvs ut-källan $\mathcal{B}$ har $slh(b_1) = 0.46$, $slh(b_2) = 0.54$).

Bakåt-sannolikheterna Q_{ij} ges av Bayes formel:

$$Q_{ij} = slh(a = a_i \mid b = b_j) = \frac{p_i}{q_j} P_{ij}.$$

Alltså:

$$Q_{11} = \frac{0.2}{0.46} \cdot 0.7 = 0.30434... \qquad Q_{12} = \frac{0.2}{0.54} \cdot 0.3 = 0.11111...$$
$$Q_{21} = \frac{0.8}{0.46} \cdot 0.4 = 0.69565... \qquad Q_{22} = \frac{0.8}{0.54} \cdot 0.6 = 0.88888...$$

Systementropier (vi använder basen 2, och vi skriver som vanligt $H_2(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$):

$$\begin{aligned} H_2(\mathcal{A}|\mathcal{B}) &= 0.46 \cdot H_2(\mathcal{A}|b = b_1) + 0.54 \cdot H_2(\mathcal{A}|b = b_2) \\ &= 0.46 \cdot H_2(Q_{11}) + 0.54 \cdot H_2(Q_{12}) = 0.67956... \\ H_2(\mathcal{B}|\mathcal{A}) &= 0.2 \cdot H_2(\mathcal{B}|a = a_1) + 0.8 \cdot H_2(\mathcal{B}|a = a_2) \\ &= 0.2 \cdot H_2(0.7) + 0.8 \cdot H_2(0.4) = 0.95301... \\ H_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &= H_2(\mathcal{A}) + H_2(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = H_2(0.2) + H_2(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = 1.674946... \end{aligned}$$

Alternativ beräkning: Vi beräknar förenade sannolikheterna $R_{ij} = p_i P_{ij}$; $R_{11} = 0.14$, $R_{12} = 0.06$, $R_{21} = 0.32$, $R_{22} = 0.48$, härur följer $H(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = -\sum_{i,j} R_{ij} \log_2 R_{ij} = 1.674946...$.

Slutligen, informationen:

$$I_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = H_2(\mathcal{A}) - H_2(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = 0.042359...$$

6. i) Koden är perfekt omm likhet gäller i Hammings sfärpackningsgräns;

$$q^n \geqq |\mathcal{C}| \cdot \sum_{j=0}^{t} \binom{n}{j} \cdot (q-1)^j.$$

Här är $q = 3$, $n = 11$, $t = 2$ ($(d(\mathcal{C}) - 1)/2$ avrundat nedåt), $|\mathcal{C}| = 729 = 3^6$, så olikheten ovan blir i vårt fall:

$$3^{11-6} \geqq 1 + \binom{11}{1} \cdot 2 + \binom{11}{2} \cdot 2^2.$$

Vi ser att likhet gäller! ($VL = 243$ och $HL = 1 + 22 + 55 \cdot 4 = 243$.) Alltså är koden perfekt!

ii) Här tror jag att det är feltryck; kanalen bör väl vara den *ternära* symmetriska kanalen (eftersom $F = F_3$ har tre element), med kanalmatris $\begin{pmatrix} 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ 0.05 & 0.9 & 0.05 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 \end{pmatrix}$ (då är ju sannolikheten $Q = 0.05 + 0.05 = 0.1$ att en given siffra sänds fel!).

Eftersom koden är perfekt blir felsannolikheten för närmaste-granne-regeln:

$$\begin{aligned} Slh_E \quad (= Slh_M) \quad &= 1 - \sum_{j=0}^{t} \binom{11}{j} \cdot 0.1^j \cdot 0.9^{11-j} \\ &= 1 - 0.9^{11} - 11 \cdot 0.1 \cdot 0.9^{10} - 55 \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^9 = 0.08956... \end{aligned}$$

7. $q = 5$. Paritets-check-matris kan t.ex. tas som: $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Då blir en generatormatris: $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Enligt Hammings sfärpackningsgräns är

$$\begin{aligned} q^n &\geqq q^{n-3} \left(1 + \binom{n}{1} (q-1)\right) \\ \Rightarrow q^3 &\geqq 1 + \binom{n}{1} (q-1) \\ \Rightarrow \frac{q^3 - 1}{q - 1} &\geqq n \\ \Rightarrow q^2 + q + 1 &\geqq n, \end{aligned}$$

VSB.