UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Strömberg och Leo Larsson

Prov i matematik
Fristående kurs
Matematik MN2
2002-10-30

Skrivtid: 9.00–14.00 Lösningar ska åtföljas av förklarande text.
Hjälpmedel: formelsamling och manuella skrivdon

1. Lös ekvationen $z^4 = -16i$.

(3)

2. Ange en parametrisk ekvation för skärningslinjen mellan planen

$$\pi_1 : x - 3y + 2z = 0$$

och

$$\pi_2 : 2x + y + 5z = 0.$$

(4)

3. Bestäm alla egenvärden med tillhörande egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

(4)

4. Bestäm matrisen i standardbasen för den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som ges av ortogonal projektion på planet

$$\pi : x = s(1, -1, 1) + t(0, 1, 1)$$

(5)

5. Vilka av följande serier konvergerar? Vilka konvergerar absolut?

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^2 + e^{-n}}, \text{ b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln(n^n)}, \text{ c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n^3}{2^n + 3^n},$$

(3)

6. Undersök om följande gränsvärden existerar eller inte och beräkna dem om de existerar.

$$\text{a)} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2}{x^2 \ln(1+x)\sin x}, \ \text{b)} \ \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \ \text{c)} \ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2x^2 - y^2}$$

(3)

7. Bestäm det minimala och maximala avståndet från origo till skärningskurvan mellan den elliptiska cylindern $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$ och planet $x = z$.

(4)

8. Avgör om funktionen $f(x,y)$ som definieras nedan har en stationär punkt i origo eller inte, samt om den har ett lokalt extremvärde där eller inte och om den har ett lokalt extramvärde där bestäm dess karaktär.

$$f(x,y) = x^2 + 3x(y + x^2) + \cos(x)\cos(2y)$$

(4)

9. Lös följande diffekvation fullständigt

$$y'' + y = \cos(\alpha x)$$

där $y = y(x)$ är en funktion av x och α är en reell konstant.

(4)

10. Laplaceoperatorn i två dimensioner, Δ (i de kartesiskakoordinaterna x och y) definieras genom att den verkar på en funktion $f \in C^2$ på följande sätt:

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

a) Skriv om Δ i polära koordinater, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ ($r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$), dvs skriv ange $\Delta f(r,\theta)$ i termer av derivator m a p r och θ.

b) En funktion $f(x,y)$ som uppfyller $\Delta f = 0$ kallas harmonisk. Hitta den allmänna formen för en harmonisk funktion som endast beror av variabeln r, dvs $f(x,y) = f(r)$ med $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

(6)

Lösningar till tentamen i Matematik MN2 2002-10-30

Lösning till problem 1. Skriv om på polär form $-16i = re^{i\theta}$ med $r = 16$ och $\theta = \theta_n = \pi + \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi = \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi$, där $n = 0,1,2,3$ (övriga värden ger samma punkter) $z = \rho e^{\phi_k}$ ges då av $\rho = \sqrt[4]{16} = 2$, och $\phi_k = \dfrac{1}{4}\theta_n = \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} = \dfrac{3+4k}{8}\pi$, där $k = 0,1,2,3$.

Lösning till problem 2. På på skärningslinjen måste båda ekvationerna gälla, dvs den första ger att $x = 3y - 2z$, stoppa in det i den andra ekvationen ger $0 = 2(3y-2z) + y + 5z = 7y + z$, dvs skärningslinjen har ekvationen $7y + z = 0$. Låt nu z vara parametern $z = t$. Då blir $y = -\dfrac{1}{7}t$ och $x = 3y - 2z = -\dfrac{3}{7}t - 2t = -\dfrac{17}{7}t$ och om vi bryter ut $\dfrac{1}{7}$får vi en parameterframställning $(x,y,z) = t(-17,-1,7)$, där $t \in \mathbb{R}$.

Lösning till problem 3. Lös egenvärdes ekvationen

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{5}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

vilket ger $\lambda = \dfrac{5}{2} \pm \dfrac{1}{2}$ dvs $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 3$. Lös sedan ekvationen $AX = \lambda X$för dessa båda värden på lambda. Du får då egenvektorerna (linjerna) $v_1 = t(1,1)$, $t \in \mathbb{R}$ samt $v_2 = t(1,-1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Lösning till problem 4. Som bas kan vi använda vektorerna $u = (1,-1,1)$, $v = (0,1,1)$ i planet som du vet fixeras av projektionen (och de är redan ortogonala) samt $w = u \times v = (-2,-1,1)$, deras kryssprodukt som är normal till planet och därmed avbildas på $(0,0,0)$. Ställ sedan upp ekvationssystemet $F(u) = u$, $F(v) = v$ och $F(w) = 0$. Använd lineariteten hos F för att göra om det till ett ekvationssystem i de obekanta $F(e_1), F(e_2)$ samt $F(e_3)$ där e_1, e_2, e_3 betecknar standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Du får då en matrisekvation med $X = (F(e_1)F(e_2)F(e_3))^t$ $AX = B$, lös denna på lämpligt sätt, t.ex. genom att bara lösa det som ett vanligt ekvationssystem eller genom matrisräkning vilket slutligen resulterar i

$$(F(e_1)F(e_2)F(e_3)) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösning till problem 5. a) divergent, ty $a_n = \dfrac{n^3}{n^2 + e^{-n}} = n\dfrac{1}{1 + \frac{1}{n^2 e^n}} \to \infty \dfrac{1}{1+0} = \infty$

b) betingat konvergent, ty $a_n = \dfrac{\cos(n\pi)}{\ln(n^n)} = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n^n)}$ är alternerande, och $|a_n| = \dfrac{1}{\ln(n^n)} = \dfrac{1}{n \ln n}$ är strikt avtagande mot 0 eftersom $n \ln n$ är strikt växande. Ej absolutkonvergent eftersom $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ är divergent.

c) (absolut) konvergent, ty $a_n = \dfrac{n^2 + n^3}{2^n + 3^n} \le \dfrac{2n^3}{2^n}$ och $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{2}\sqrt[n]{2n^3} \to \dfrac{1}{2} < 1$

Lösning till problem 6. a) $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + O(x^6)$, $\cos^2 x = 1 - x^2 + (\frac{1}{4} + \frac{1}{12})x^4 + O(x^6) = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + O(x^6)$ och enligt geometriska serien $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + O(t^3)$ blir alltså

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + O(x^6)} = \frac{1}{1 - (x^2 - \frac{1}{3}x^4 + O(x^6))} = 1 + (x^2 - \frac{1}{3}x^4 + O(x^6)) + x^4 + O(x^6) = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4$$

vidare är $\ln(1+x) = x + O(x^2)$ $\sin(x) = x + O(x^3)$ sätter vi ihop detta får vi

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2}{x^2 \ln(1+x)\sin x} = \frac{\frac{2}{3}x^4 + O(x^6)}{x^2(x + O(x^2))(x + O(x^3))} = \frac{\frac{2}{3} + O(x^2)}{1(1 + O(x))(1 + O(x^2))} \to \frac{2}{3}, \text{ då } x \to 0$$

b) kom ihåg: $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$, då får vi $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}e = 1$

c) om vi närmar oss $(0,0)$ på x-axeln ($y = 0$) blir limes 0, men om vi går längs linjen $x = y$ får vi limes till 1. Alltså kan gränsvärdet inte existera.

Lösning till problem 7. Optimera först kvadraten på avståndet istället och ta roten ur den på slutet. Dvs vi ska optimera $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ underbivillkoren $g_1(x,y,z) = (\frac{x}{2})^2 + y^2 - 1 = 0$ och $g_2(x,y,z) = x - z = 0$. Ställ upp ekvationssystemet $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$, $g_1 = g_2 = 0$, där $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$, $\nabla g_1 = (\frac{1}{2}x, 2y, 0)$ och $\nabla g_2 = (1, 0, -1)$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda\frac{x}{2} + \mu \\ 2y &= \lambda 2y \\ 2z &= -\mu \\ \frac{1}{4}x^2 + y^2 &= 1 \\ x &= z \end{cases}$$

ekvation 2 har två lösningar, antingen $y = 0$ eller $y = 0$, $\lambda = 1$. Om $y = 0$ ger ekv 4 att $x = \pm 2$ och ekvation 5 ger att $z = x = \pm 2$ dvs punkterna blir $(\pm 2, 0, \pm 2)$ och $f(\pm 2, 0, \pm 2) = 8$. Om $y \neq 0$ och $\lambda = 1$ då får vi ekvationerna $2x = \frac{1}{2}x + \mu$, $z = x = -\frac{1}{2}\mu$ dvs $\mu = -2x$ och vi får $2x = \frac{1}{2}x - 2x$ dvs $x = 0$, och därmed också $z = 0$ och $y = \pm 1$. Den stationära punkten i det här fallet blir $(0, \pm 1, 0)$ och $f(0, \pm 1, 0) = 1$.

Genom att jämföra de olika punkterna ser vi att max $f = 8$ och min $f = 1$ under de givna bivillkoren. Det maximala resp minimala avståndet från origo till skärningskurvan blir alltså $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ resp 1.

Lösning till problem 8. Taylorutveckla cosoch sätt in direkt för att identifiera Taylorpolynomet av ordning 2.

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= x^2+3xy+3x^3+(1-\frac{1}{2}x^2+O(x^4))(1-\frac{1}{2}(2y)^2+O(y^4)) \\
&= x^2+3xy+1-\frac{1}{2}x^2-2y^2+O(|(x,y)|^3) = Q(x,y)+R \\
Q(x,y) &= \frac{1}{2}x^2-2y^2+3xy = \frac{1}{2}\left(x^2-4y^2+6xy\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((x+3y)^2-13y^2\right)
\end{aligned}
$$

vilken är indefinit och $f(x,y)$ har alltså en sadelpunkt och inget extremvärde i $(0,0)$.

Lösning till problem 9. Den homogena ekvationen $y''+y=0$ löses först genom karakteristiska polynomet $p(r)=r^2+1$ som har rötterna $r=i$, $r=-i$ och den allmänna lösningen blir då

$$y_h = A'e^{ix}+B'e^{-ix} = A\cos x + B\sin x$$

För partikulärlösning, lös först hjälpekvationen $y''+y=e^{i\alpha x}$ genom att sätta $y=ze^{i\alpha x}$ får vi $y'=e^{i\alpha x}(z'+i\alpha z)$ och $y''=e^{i\alpha x}(z''+2i\alpha z'-\alpha^2 z)$ insättning i ekvationen samt förkortning med $e^{i\alpha x}$ ger

$$z''+2i\alpha z'+(1-\alpha^2)z=1$$

vilkem t.ex. har lösningen $z=\dfrac{1}{1-\alpha^2}$ vilket ger $\tilde{y}_p=\dfrac{e^{i\alpha x}}{1-\alpha^2}=\dfrac{\cos(\alpha x)+i\sin(\alpha x)}{1-\alpha^2}$ och vi vet att en partikulärlösning till den ursprungliga ekvationen ges av realdelen av detta, dvs $y_p=\dfrac{\cos(\alpha x)}{1-\alpha^2}$ och den fullständiga lösningen är alltså

$$y = A\cos x + B\sin x + \frac{\cos(\alpha x)}{1-\alpha^2}$$

Lösning till problem 10. Använd kedjeregeln ett antal gånger och få fram

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2\cos 2\theta}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} - \frac{2\cos 2\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$$

om $f(x,y)=f(r)$ får vi ekvationen för en harmonisk funktion till:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} = 0.$$

Löser man denna m.h.a. integrerande faktor får man

$$f(r) = A\ln r + B$$

där A och B är godtyckliga konstanter.