F10

Ortogonalitet

Två vektorer $v, w \in \mathbb{R}^n$ kallas ortogonala (= vinkelräta) om $\boxed{v \cdot w = 0}$.

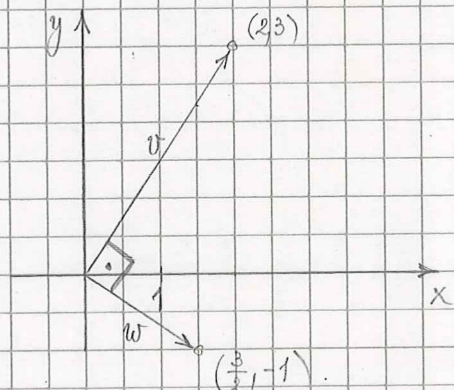
Notation: $v \perp w$

Obs. a) Om $v \neq 0$ och $w \neq 0$ och $\alpha = \sphericalangle(v, w)$, då gäller $v \cdot w = 0$ omm $\alpha = \frac{\pi}{2}$

b) Om $v = 0$ eller $w = 0$, då gäller alltid $v \cdot w = 0$.

Bevis. a) $\cos\alpha = \dfrac{v \cdot w}{\|v\|\,\|w\|}$ medför att $v \cdot w = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$.

b) framgår direkt av skalärproduktens definition.



Ex.1 Vektorerna $v = (2,3)$ och $w = \left(\frac{3}{2}, -1\right)$

är ortogonala, då $v \cdot w = (2,3) \cdot \left(\frac{3}{2}, -1\right) = 3 - 3 = 0$.

Ex.2 Vektorerna $v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ och $w = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$

är ortogonala $\forall \alpha$. Figur!

Ex.3 Visa att linjen $L: 2x + 3y = c$ är ortogonal mot vektorn $n = (2,3)$.

Lösning. Låt $P = (x_1, y_1)$ och $Q = (x_2, y_2)$ vara punkter på linjen L. Vi ska visa att $\overrightarrow{PQ} \perp n$.

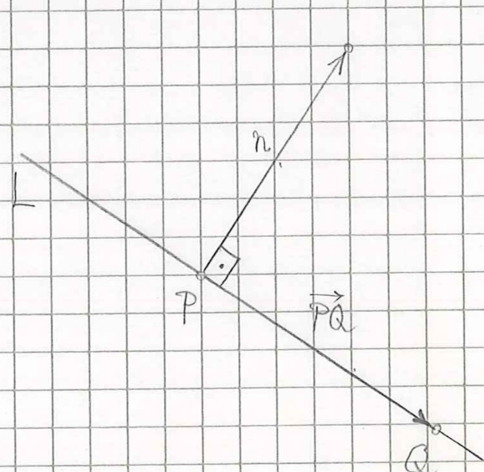
$P \in L$ och $Q \in L$ innebär att

$$\begin{aligned} (-1) \quad & 2x_1 + 3y_1 = c \\ & 2x_2 + 3y_2 = c \end{aligned}$$

$2(x_2 - x_1) + 3(y_2 - y_1) = 0$, dvs.

$(2,3) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = 0$, dvs.

$n \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$. □

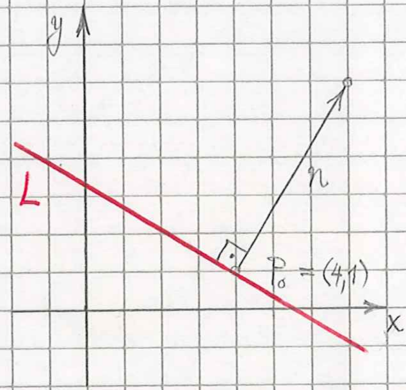


Obs. att olika värden på c ger olika linjer $L: 2x+3y=c$, som dock alla är ortogonala mot $n=(2,3)$. Därför är de alla parallella med varandra.

Ex. 4 Linjen L är ortogonal mot vektorn $n=(3,5)$ och går genom punkten $P_0=(4,1)$. Finn L:s ekvation.

Lösning. För varje punkt $P=(x,y)$ i planet är $\overrightarrow{P_0P}=(x-4,y-1)$. Alltså är

$$P\in L \iff \overrightarrow{P_0P}\perp n \iff n\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$$
$$\iff 3(x-4)+5(y-1)=0$$
$$\iff 3x+5y=17$$



Alternativ lösning. Enligt exempel 3 beskriver ekvationen

$3x+5y=c$ för varje värde på c en linje L_c

som är ortogonal mot $n=(3,5)$. Vidare gäller att

$$L_c \text{ går genom } P_0 \iff P_0\in L_c \iff 3\cdot 4+5\cdot 1=c \iff c=17.$$

Svar. L:s ekvation är $3(x-4)+5(y-1)=0$,
eller ekvivalent $3x+5y=17$.

Det är rätt uppenbart att exemplen 3 och 4 kan generaliseras till följande allmänna beskrivning av samtliga linjer i planet.

Linjer i planet. Låt $n = (a,b)$ vara en nollskild vektor. Då beskriver ekvationen

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

(Linjens ekvation på standardform)

för varje värde på c en linje $L \perp n$. Omvänt beskrivs linjen $L \perp n$ genom $P_0 = (x_0, y_0)$ av ekvationen

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0}$$

(Linjens ekvation på punktnormalform)

Analogt gäller följande allmänna beskrivning av samtliga plan i rymden.

Plan i rymden. Låt $n = (a,b,c)$ vara en nollskild vektor. Då beskriver ekvationen

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

(Planets ekvation på standardform)

för varje värde på d ett plan $E \perp n$. Omvänt beskrivs planet $E \perp n$ genom $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ av ekvationen

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

(Planets ekvation på punktnormalform)

Ex. 5 Planet E är ortogonal mot vektorn $n = (1,9,8)$ och går genom punkten $P_0 = (1,1,4)$. Finn E:s ekvationer på punktnormalform och på standardform.

Lösning.

$$(x-1) + 9(y-1) + 8(z-4) = 0 \qquad E\text{:s ekvation på pnf}$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 9y + 8z - 1 - 9 - 32 = 0$$

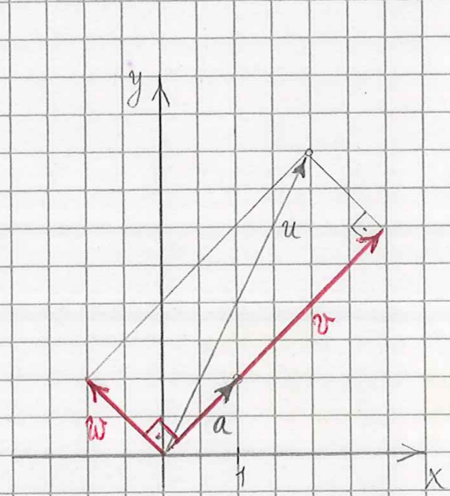
$$\Leftrightarrow \quad x + 9y + 8z - 42 = 0 \qquad E\text{:s ekvation på sf.}$$

Ex. 6 Givet vektorerna $u = (2,4)$ och $a = (1,1)$, finn vektorer v och w så att

(a) $u = v + w$

(b) $v = ca$ för något $c \in \mathbb{R}$

(c) $w \perp a$



Lösning. Med ansatsen $v = ca$ och $w = u - v = u - ca$ är villkoren (a) och (b) uppfyllda $\forall c \in \mathbb{R}$. Återstår att bestämma talet c så att $w \perp a$.

$$0 = a \cdot w = a \cdot (u - ca) = a \cdot u - c(a \cdot a) = a \cdot u - c\|a\|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad c = \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Svar. $v = (3,3)$, $w = (-1,1)$.

Den lösningsmetod vilken vi tillämpade i exempel 6 gäller i stor allmänhet, och alstrar då lösningen av följande mycket allmänna

Problem. Givet vektorerna u och $a \neq 0$ i $\mathbb{R}^n$, finn vektorer v och w så att

(a) $u = v + w$

(b) $v = ca$ för något $c \in \mathbb{R}$

(c) $w \perp a$

Lösning. $\boxed{v = \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a}$ och $\boxed{w = u - \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a}$ är problemets entydiga lösning.

Notation. $\operatorname{proj}_a u := \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a = v$ kallas för u:s ortogonala projektion på a, och

$u - \operatorname{proj}_a u = w$ kallas för u:s summand ortogonal mot a.

Ex. 7 Givet $u = (5,6)$ och $a = (2,-1)$, finn $\|\text{proj}_a u\|$.

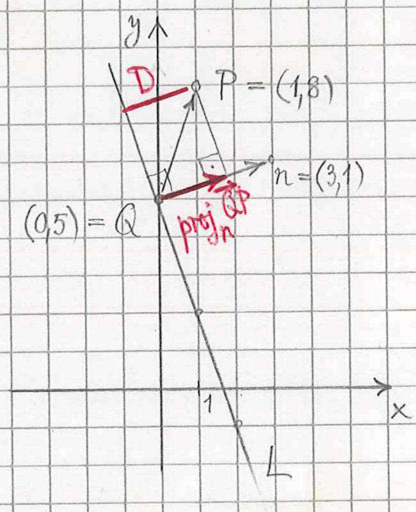
Lösning. $\|\text{proj}_a u\| = \left\| \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a \right\| = \frac{|u \cdot a|}{\|a\|^2} \|a\| = \frac{|u \cdot a|}{\|a\|}$

$$= \frac{|10-6|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}\sqrt{5}.$$

Resonemanget i lösningen till exempel 7 visar att

Formeln $\boxed{\|\text{proj}_a u\| = \frac{|u \cdot a|}{\|a\|}}$ gäller allmänt.

Ex. 8 Bestäm (det minsta) avståndet mellan punkten $P = (1,8)$ och linjen $L: \ 3x + y - 5 = 0$



Lösning. Välj en punkt Q på L, exvis $Q = (0,5)$.

Vi vet att vektorn $n = (3,1)$ är ortogonal mot L.

Avståndet D mellan P och L är alltså

$$D = \|\text{proj}_n \overrightarrow{QP}\| = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot n|}{\|n\|} = \frac{|(1,3)\cdot(3,1)|}{\|(3,1)\|} = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{6}{10}\sqrt{10}.$$

Svar. $D = \frac{3}{5}\sqrt{10}$

Resonemanget i exempel 8 kan generaliseras till följande allmänna

Avståndsformler. Avståndet D mellan punkten $P=(x_0,y_0)$ och linjen $L: ax+by+c=0$ i planet är

$$\boxed{D = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Avståndet D mellan punkten $P=(x_0,y_0,z_0)$ och planet $E: ax+by+cz+d=0$ i rymden är

$$\boxed{D = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Ex. 8 igen. Enligt formeln ovan blir $D = \frac{|3\cdot 1+8-5|}{\sqrt{9+1}} = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{3}{5}\sqrt{10}$.

Ex. 9 Avståndet mellan punkten $P=(-1,2,1)$ och planet $E: 2x+3y-4z-1$ i rymden är

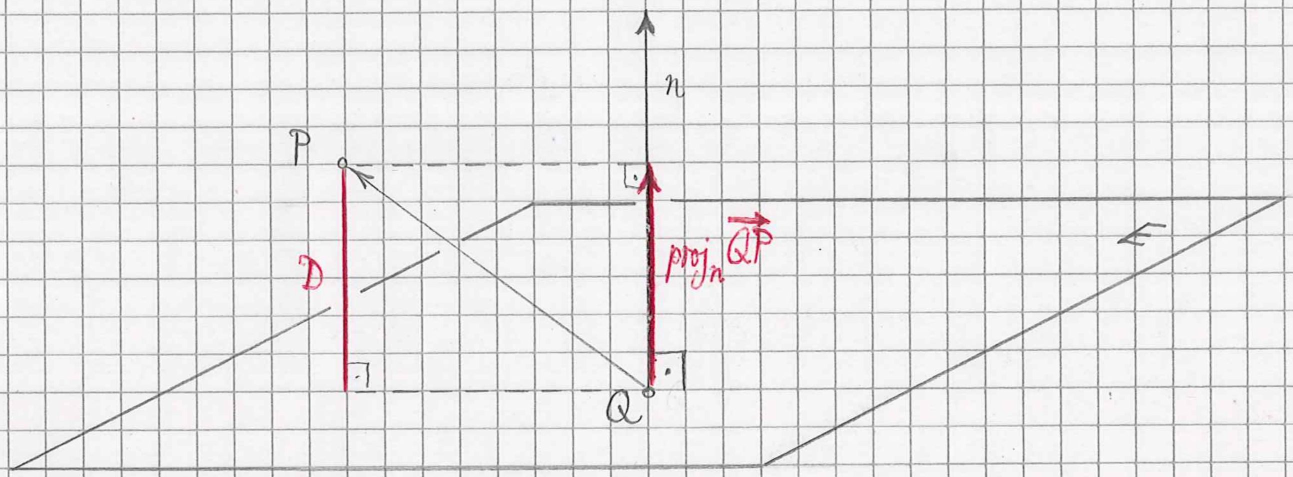
$$D = \frac{|2\cdot(-1)+3\cdot 2-4\cdot 1-1|}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{|-2+6-4-1|}{\sqrt{29}} = \frac{1}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29}}{29} .$$

Varför gäller dessa formler? I fallet P och L i $\mathbb{R}^2$ väljer vi en punkt $Q=(x_1,y_1)\in L$, och inser som i exempel 8 att $D = \frac{|\overrightarrow{QP}\cdot n|}{\|n\|}$. Vidare är

$$\overrightarrow{QP}\cdot n = n\cdot\overrightarrow{QP} = (a,b)\cdot(x_0-x_1,y_0-y_1) = a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)$$
$$= ax_0+by_0-ax_1-by_1 = ax_0+by_0+c ,$$

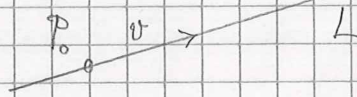
samt $\|n\| = \|(a,b)\| = \sqrt{a^2+b^2}$, varav formeln framgår.

I fallet P och E i $\mathbb{R}^3$ väljer vi en punkt $Q = (x_1, y_1, z_1) \in E$, och inser med hjälp av figuren nedan att $D = \dfrac{|\overrightarrow{QP} \cdot n|}{\|n\|}$. Analogt med resonemanget för P och L i $\mathbb{R}^2$ inser man vidare att $\overrightarrow{QP} \cdot n = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$, samt $\|n\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.



Låt L vara en linje i rymden. Finns det någon slags ekvation som beskriver den?

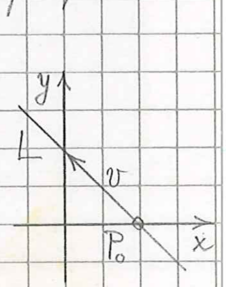
Låt P_0 vara en punkt på linjen och $v \neq 0$ en vektor på linjen. Då beskrivs alla punkter $P \in L$ enligt



$$\boxed{P = P_0 + tv \quad , \quad t \in \mathbb{R}}$$

(Linjens ekvation på parameterform)

Även linjer i planet, eller i $\mathbb{R}^4$, eller rentav i $\mathbb{R}^n$ kan anges genom en ekvation på parameterform.



Ex. 10 Linjen $L: x+y=1$ går genom $P_0 = (1,0)$ och bär vektorn $v = (-1,1)$. Alltså är $P = (1,0) + t(-1,1)$ en ekvation på parameterform för L.

Ex. 11 $P = (0,1,2) + t(3,4,5)$, $t \in \mathbb{R}$ beskriver på parameterform den linje L i rymden, som går genom punkten $P_0 = (0,1,2)$ och har riktningsvektor $v = (3,4,5)$.