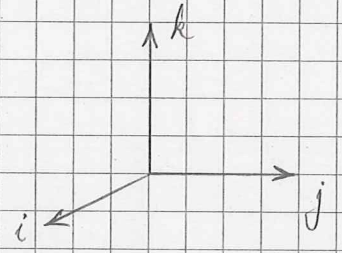
F11

Vektorprodukt

Skalärprodukten tillordnar två givna vektorer v, w skalären $v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$, som mäter vinklar och längder.

Vektorprodukten tillordnar två givna vektorer v, w vektorn $v \times w = \ldots$ (se nedan), som löser diverse andra geometriska problem.

Varje vektor $v = (v_1, v_2, v_3)$ i rymden med $\|v\| = 1$ kallas för enhetsvektor (= unit vector). Speciellt är $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$, $k = (0,0,1)$ de s.k. standardenhetsvektorerna.



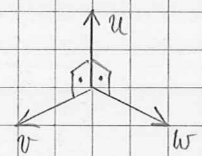
Givet två vektorer v, w i rymden, så konstruerar vi den nya vektorn

$$v \times w = \underbrace{\begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}}_{\text{Minnesregel: utveckla den "formella determinanten" längs första raden}} := \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} k = \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left(v_2 w_3 - v_3 w_2,\ -v_1 w_3 + v_3 w_1,\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \right)$$

som kallas vektorprodukten (= kryssprodukten, cross product) av v och w.

Ex. 1 Givet $v = (-3, 2, 1)$ och $w = (3, 1, 5)$, finn en vektor $u \neq 0$ så att $u \perp v$ och $u \perp w$.

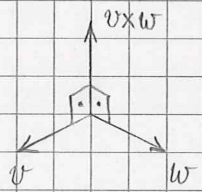


Lösning. $u = v \times w$ duger! Vi verifierar detta.

$$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (9, 18, -9), \quad \text{och}$$

$$v \cdot (v \times w) = (-3, 2, 1) \cdot (9, 18, -9) = -27 + 36 - 9 = 0 \quad \text{samt}$$

$$w \cdot (v \times w) = (3, 1, 5) \cdot (9, 18, -9) = 27 + 18 - 45 = 0.$$



Allmänt gäller att $v \times w$ är ortogonal mot både v och w.

Detta uttrycks av (1) och (2) i följande lista över

Några räkneregler för vektorprodukten

(1) $v \cdot (v \times w) = 0$

(2) $w \cdot (v \times w) = 0$

(3) $w \times v = -(v \times w)$ — antikommutativ!

(4) $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$

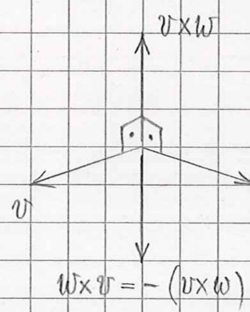
(5) $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$

(4)–(5): distributiv

(6) $(cv) \times w = c(v \times w) = v \times (cw)$ — skalärer får brytas ut

(7) $v \times 0 = 0 = 0 \times v$

(8) $v \times v = 0$



Beviset till (3)–(8) framgår av vektorproduktens definition, i samband med lämpliga determinantregler.
Låt oss som axplock bevisa (3) och (8).

(3) $$w \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \underset{(DR3)}{=} - \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = -(v \times w)$$

(8) $$v \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \underset{(DR7)}{=} 0 \, .$$

Reglerna (1) och (2) härleds smartast med hjälp av den s.k. skalärtrippelprodukten.

Givet tre vektorer u, v, w i rymden, så bestämmer de skalären $u \cdot (v \times w)$, kallad <u>skalärtrippelprodukten</u> av u, v, w. Den uppfyller

<u>Skalärtrippelproduktformeln</u>

$$\boxed{u \cdot (v \times w) = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}}$$

Speciellt blir då

$$v \cdot (v \times w) = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \underset{(DR7)}{=} 0$$

och

$$w \cdot (v \times w) = \det \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \underset{(DR7)}{=} 0 \, ,$$

vilket bevisar (1) och (2). Själva skalärtrippelproduktformeln inses så här.

$$u \cdot (v \times w) = (u_1, u_2, u_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right)$$

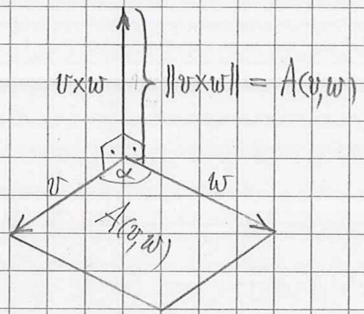
$$= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \, . \quad \square$$

Problem. Givet två vektorer v, w i rymden, beräkna

$$A(v,w) \; = \; \text{arean av parallellogrammet som spänns upp av } v \text{ och } w .$$

Detta problem löses av

$$\boxed{A(v,w) = \|v \times w\|}$$



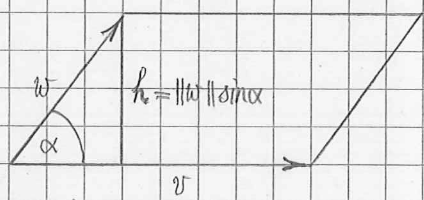
Beviset till denna likhet bygger på Lagranges identitet

$$\|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - (v \cdot w)^2$$

vilken i sin tur verifieras genom att fullständigt utveckla båda leden och konstatera att de är lika.
Vi stoppar in skalärproduktformeln och får

$$\|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - \|v\|^2 \|w\|^2 \cos^2 \alpha$$

$$= \|v\|^2 \|w\|^2 \sin^2 \alpha ,$$



vilket medför

$$\|v \times w\| = \|v\| \|w\| \sin \alpha = \|v\| h = A(v,w) . \qquad \square$$

Ex. 2 Bestäm $A(v,w)$, då $v = (2,3,0)$ och $w = (-1,2,-2)$.

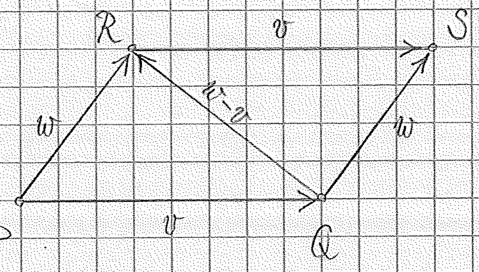
Lösning. $A(v,w) = \|v \times w\|$, där

$$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-6, 4, 7) .$$

Alltså är $\|v \times w\| = \sqrt{36 + 16 + 49} = \sqrt{101}$

Svar. $A(v,w) = \sqrt{101}$.

Ex. 3 Bestäm arean $A(P,Q,R)$ för triangeln vars hörnpunkter är $P=(1,-1,2)$, $Q=(0,3,4)$, $R=(6,1,8)$.



Lösning. Sätt $v=\overrightarrow{PQ}$, $w=\overrightarrow{PR}$, och $S=P+v+w$. Då har trianglarna (P,Q,R) och (Q,R,S) samma sidolängder $\|v\|, \|w\|, \|w-v\|$, alltså samma area $A(P,Q,R)=A(Q,R,S)$. Därmed är

$$A(P,Q,R) = \frac{1}{2}A(v,w) = \frac{1}{2}\|v\times w\|.$$

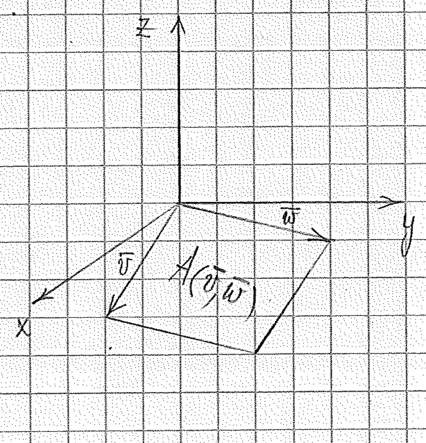
Vidare är $v=\overrightarrow{PQ}=(-1,4,2)$ och $w=\overrightarrow{PR}=(5,2,6)$, alltså

$$v\times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}\right) = (20, 16, -22), \quad \text{alltså}$$

$$\frac{1}{2}\|v\times w\| = \frac{1}{2}\|2(10,8,-11)\| = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{2}\,\|(10,8,-11)\| = \sqrt{100+64+121} = \sqrt{285}$$

Svar. $A(P,Q,R)=\sqrt{285}$.

Ex. 4 Givet två vektorer v, w i planet, beräkna arean $A(v,w)$.



Lösning. Vi inbäddar xy-planet i xyz-rymden.
Planets vektorer $v=(v_1,v_2)$ och $w=(w_1,w_2)$, sedda som vektorer i rymden, blir då $\bar{v}=(v_1,v_2,0)$ och $\bar{w}=(w_1,w_2,0)$. Vidare är

$$A(v,w) = A(\bar{v},\bar{w}) = \|\bar{v}\times\bar{w}\| \quad \text{och}$$

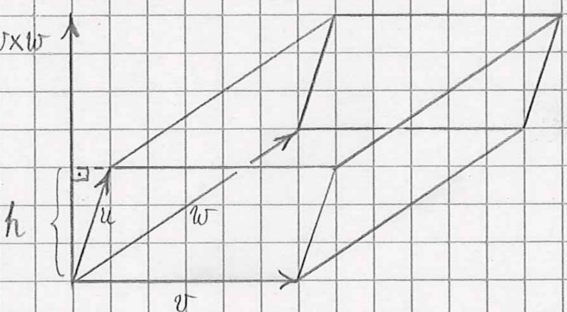
$$\bar{v}\times\bar{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & 0 \\ w_1 & w_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} v_2 & 0 \\ w_2 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & 0 \\ w_1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\right) = (0, 0, v_1w_2 - v_2w_1), \quad \text{alltså}$$

$$A(v,w) = \sqrt{(v_1w_2 - v_2w_1)^2} = |v_1w_2 - v_2w_1|.$$

Svar. $\boxed{A(v,w) = \left|\det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2\end{pmatrix}\right|}$ Geometrisk tolkning av 2×2-determinanter!

Ex. 5 Givet tre vektorer u, v, w i rymden, så spänner de upp en parallellepiped, dvs en kropp med sex parvis parallella ytor. Beräkna dess volym $V(u,v,w)$.

Lösning.



$$\begin{aligned} V(u,v,w) &= \text{basyta} \cdot \text{höjd} \\ &= A(v,w) \cdot h \qquad\qquad \|\text{proj}_{v\times w} u\| = h \\ &= \|v\times w\| \cdot \|\text{proj}_{v\times w} u\| \\ &= \|v\times w\| \frac{|u\cdot(v\times w)|}{\|v\times w\|} = |u\cdot(v\times w)|. \end{aligned}$$

Svar. $\boxed{V(u,v,w) = |u\cdot(v\times w)| = \left|\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3\end{pmatrix}\right|}$ Geometrisk tolkning av 3×3-determinanter!

Ex. 6 Givet fyra punkter A, B, C, D i rymden, avgör om de ligger i ett plan.

Lösning. Sätt $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$, $w = \overrightarrow{AD}$. Då gäller att

$$\begin{aligned} A, B, C, D \text{ ligger i ett plan} &\Leftrightarrow V(u,v,w) = 0 \\ &\Leftrightarrow u\cdot(v\times w) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3\end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$