F12

Reella vektorrum

Följande matematiska objekt kan adderas med varandra, och kan multipliceras med skalärer.

Objekt	Hur de anges	Notation
Vektorer i planet	$\nearrow$ eller (v_1, v_2)	$v \in \mathbb{R}^2$
Vektorer i rymden	$\nearrow$ eller (v_1, v_2, v_3)	$v \in \mathbb{R}^3$
Vektorer i det n-dimensionella rummet	$(v_1, \dots, v_n)$	$v \in \mathbb{R}^n$
Matriser av storlek $m \times n$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Alla dessa har gemensamt att addition och multiplikation med skalärer uppfyller följande lagar.

$$\left.\begin{array}{ll}
(1) & v + w = w + v \\
(2) & (u+v) + w = u + (v+w) \\
(3) & \text{Det finns ett s.k. \underline{nollobjekt} } 0 \text{ så att} \\
 & v + 0 = v \\
(4) & \text{För varje } v \text{ finns det ett s.k. \underline{negativt objekt} } -v \text{ så att} \\
 & v + (-v) = 0
\end{array}\right\} \text{addition}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
(5) & c(v+w) = cv + cw \\
(6) & (c+d)v = cv + cw \\
(7) & c(dv) = (cd)v \\
(8) & 1v = v
\end{array}\right\} \text{multiplikation med skalärer}$$

Allmänt kallas en mängd V vars objekt kan adderas med varandra och multipliceras med (reella) skalärer för ett (reellt) vektorrum ifall lagarna (1)-(8) är uppfyllda. Elementen $v \in V$ kallas vektorer.

$V = \mathbb{R}^n$ och $V = \mathbb{R}^{m \times n}$ är alltså de första exemplen på reella vektorrum vi mött. Obs. att dessa redan utgör oändligt många exempel, då man får ett specifikt vektorrum för varje värde på n respektive $m \times n$. Vektorrum finns inom matematiken i sin helhet som sandkorn vid havet. Här kommer några exempel utöver $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Ex. 1 Vektorrummet $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ av (oändliga) följder av reella tal.

V består av alla följder $v = (v_1, v_2, \ldots)$ av reella tal $v_i \in \mathbb{R}$. Addition och multiplikation med skalärer definieras komponentvis:

$$v + w = (v_1, v_2, \ldots) + (w_1, w_2, \ldots) := (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots)$$

$$cv = c(v_1, v_2, \ldots) := (cv_1, cv_2, \ldots)$$

Lagarna (1)-(8) är uppfyllda. Därmed är $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ett vektorrum.

Ex. 2 Vektorrummet $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ av reellvärda funktioner av en reell variabel.

V består av alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Addition och multiplikation med skalärer definieras värdevis:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(cf)(x) := c\, f(x)$$

Lagarna (1)-(8) är uppfyllda. Därmed är $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ett vektorrum.

Ex. 3 Låt $L \subset \mathbb{R}^n$ vara lösningsmängden till ett linjärt ekvationssystem $Ax = b$, där $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$. Addera lösningar komponentvis, och multiplicera lösningar med skalärer komponentvis. Då gäller:

L är ett vektorrum omm $b = 0$.

Bevis. Antag att $b = 0$. Om $x, y \in L$, då är $x+y \in L$, eftersom

$$A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0.$$

Om $c \in \mathbb{R}$ och $x \in L$, då är $cx \in L$, eftersom

$$A(cx) = c(Ax) = c0 = 0.$$

Dessutom är $0 \in L$, då $A0 = 0$. Sammanfattningsvis är $\emptyset \neq L \subset \mathbb{R}^n$, sluten under addition och sluten under multiplikation med skalärer. Då lagarna (1)–(8) är uppfyllda för alla $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, är de i synnerhet uppfyllda för alla $x, y, z \in L$. Därmed är L ett vektorrum.

Antag att $b \neq 0$. Då är $A0 = 0 \neq b$, alltså $0 \notin L$, alltså är (3) inte uppfylld. Därmed är L inte något vektorrum. $\square$

Ex. 4 Den tomma mängden $V = \emptyset$ är inte något vektorrum, då (3) inte är uppfylld.

Ex. 5 Den ettelementiga mängden $V = \{0\}$, med $0 + 0 = 0$ och $c0 = 0$, uppfyller (1)–(8) och är därmed ett vektorrum.

Vi fortsätter nu med att utveckla lite grundläggande teori för vektorrum i allmänhet. Alla resultat vi kommer fram till gäller då för alla vektorrum på en gång! I enlighet med detta utgår vi tills vidare från ett vektorrum V, ej specificerat vilket! Den som tycker att det är för abstrakt och önskar föreställa sig något konkret, rekommenderas att främst tänka på $V = \mathbb{R}^2$, eller $V = \mathbb{R}^3$, i den geometriska bemärkelsen av vektorer som anges av pilar.

Sats. I varje vektorrum V gäller:

(i) $0v = 0$

(ii) $c0 = 0$

(iii) $(-1)v = -v$

(iv) $cv = 0 \Rightarrow c = 0$ eller $v = 0$

Bevis. För (i) och (iii) se kursbok, sidan 177.

(ii)
$$\begin{aligned} c0 &= c(0+0) = c0 + c0 \\ \Rightarrow c0 - c0 &= c0 + c0 - c0 \\ \Rightarrow 0 &= c0 + 0 = c0 \end{aligned}$$

(iv) Låt $cv = 0$ och $c \neq 0$. Då är $v = 1v = (\frac{1}{c}c)v = \frac{1}{c}(cv) = \frac{1}{c}0 \underset{(ii)}{=} 0$. □

Linjärt oberoende. Varje uppsättning vektorer $v_1, \dots, v_\ell$ i ett vektorrum V bestämmer en vektorekvation

$$c_1 v_1 + \dots + c_\ell v_\ell = 0 \qquad (*)$$

vars lösningar $(c_1, \dots, c_\ell)$ sökes. Obs att $(*)$ alltid har den s.k. triviala lösningen $(c_1, \dots, c_\ell) = (0, \dots, 0)$.
Om $(*)$ har endast den triviala lösningen, då kallas vektorerna $v_1, \dots, v_\ell$ för linjärt oberoende.
Om $(*)$ har någon icketrivial lösning $(c_1, \dots, c_\ell) \neq (0, \dots, 0)$, då kallas vektorerna $v_1, \dots, v_\ell$ för linjärt beroende.

<u>Ex. 6</u> Låt i, j, k vara standardenhetsvektorerna i $\mathbb{R}^3$. Vektorekvationen

$$c_1 i + c_2 j + c_3 k = 0 \qquad (*)$$

innebär att

$$\begin{aligned}(0,0,0) &= c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,1) \\ &= (c_1,0,0) + (0,c_2,0) + (0,0,c_3) = (c_1,c_2,c_3)\end{aligned}$$

Alltså är vektorerna i, j, k <u>linjärt oberoende</u>.

<u>Ex. 7</u> Låt $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Matrisekvationen $aI + bJ = 0$ $(*)$ innebär

att $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Alltså har $(*)$ endast den triviala lösningen $(a,b) = (0,0)$, dvs. I, J är <u>linjärt oberoende</u>.

<u>Ex. 8</u> Kolonnerna $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ bestämmer ekvationen

$$c_1 u + c_2 v + c_3 w = 0 \qquad (*),$$

dvs

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c_2 \\ c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3c_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 \\ 2c_1 + c_2 - 3c_3 \\ c_2 + c_3 \end{pmatrix}.$$

Trippeln (c_1, c_2, c_3) löser $(*)$ omm den löser systemet $\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0 \\ 2c_1 + c_2 - 3c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$.

$$\begin{array}{c} -2 \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ \\ -2\ \ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ svarar mot $\begin{cases} c_1 = 2c_3 \\ c_2 = -c_3 \end{cases}$

Alltså är $(c_1, c_2, c_3) = (2, -1, 1)$ en icketrivial lösning, dvs. u, v, w är <u>linjärt beroende</u>.

Givet en uppsättning vektorer $w_1, \dots, w_k$ i ett vektorrum V, så kallas varje vektor på formen

$$d_1 w_1 + \dots + d_k w_k$$

för en <u>linjärkombination</u> av $w_1, \dots, w_k$ med koefficienterna $d_1, \dots, d_k$.

I exempel 8 är u, v, w linjärt beroende, då $2u - v + w = 0$ gäller. Var och en av vektorerna u, v, w kan då skrivas som en linjärkombination av de övriga två:

$$u = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}w \quad , \quad v = 2u + w \quad , \quad w = -2u + v .$$

Allmänt gäller följande

<u>Sats.</u> <u>En uppsättning vektorer $v_1, \dots, v_\ell$ med $\ell \geq 2$ är linjärt beroende omm någon vektor v_i kan skrivas som en linjärkombination av de övriga $\ell - 1$ vektorer.</u>

<u>Bevis.</u> Antag att $v_1, \dots, v_\ell$ är linjärt beroende. Då har ekvationen

$$c_1 v_1 + \dots + c_\ell v_\ell = 0 \qquad (*)$$

en lösning $(c_1, \dots, c_\ell)$, där något $c_i \neq 0$. Från $(*)$ kan vi då lösa ut

$$v_i = -\frac{c_1}{c_i} v_1 - \dots - \frac{c_{i-1}}{c_i} v_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i} v_{i+1} - \dots - \frac{c_\ell}{c_i} v_\ell .$$

Antag omvänt att $v_i = d_1 v_1 + \dots + d_{i-1} v_{i-1} + d_{i+1} v_{i+1} + \dots + d_\ell v_\ell$. Då är

$$0 = d_1 v_1 + \dots + d_{i-1} v_{i-1} - v_i + d_{i+1} v_{i+1} + \dots + d_\ell v_\ell ,$$

dvs. $(d_1, \dots, d_{i-1}, -1, d_{i+1}, \dots, d_\ell)$ är en icketrivial lösning till $(*)$. Alltså är $v_1, \dots, v_\ell$ linjärt beroende. $\square$