F13

Bas och koordinater

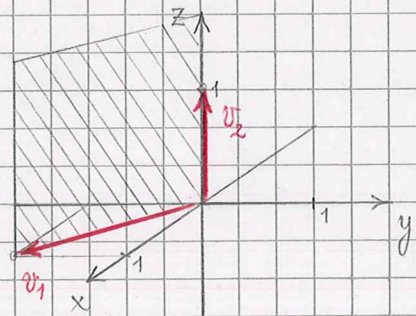
En uppsättning vektorer $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_\ell)$ i ett vektorrum V

(a) kallas linjärt oberoende om ekvationen $c_1 v_1 + \ldots + c_\ell v_\ell = 0 \quad (*_0)$ har endast den triviala lösningen $(c_1, \ldots, c_\ell) = (0, \ldots, 0)$,

(b) sägs spänna upp (eller generera) V om ekvationen $c_1 v_1 + \ldots + c_\ell v_\ell = w \quad (*_w)$ har någon lösning $(c_1, \ldots, c_\ell)$ för varje $w \in V$,

(c) kallas en bas för V om både (a) och (b) gäller.

Ex. 1 $\quad v_1 = (1,-1,0)$ och $v_2 = (0,0,1)$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$. Paret $\underline{v} = (v_1, v_2)$ är linjärt oberoende, men spänner inte upp $\mathbb{R}^3$.



Bevis.
$$\begin{aligned} c_1 v_1 + c_2 v_2 &= c_1(1,-1,0) + c_2(0,0,1) \\ &= (c_1, -c_1, 0) + (0,0,c_2) \\ &= (c_1, -c_1, c_2) \end{aligned}$$

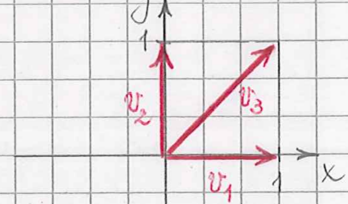
Givet $w = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, så löser (c_1, c_2) ekvationen $c_1 v_1 + c_2 v_2 = w \quad (*_w)$ omm

$$(c_1, -c_1, c_2) = (x,y,z) \iff \begin{cases} c_1 & = x \\ -c_1 & = y \\ c_2 & = z \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 & = x \\ 0 & = x+y \\ c_2 & = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c_1 & = x \\ c_2 & = z \\ 0 & = x+y \end{cases}$$

Vi läser av att $(*_0)$ har den entydiga lösningen $(c_1, c_2) = (0,0)$, medan $(*_w)$ är lösbart omm $x+y=0$. För $w = (1,0,0)$ exvis är $x+y = 1+0 = 1 \neq 0$, alltså $(*_w)$ ej lösbar. $\square$

Ex. 2 $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$, $v_3 = (1,1)$ är vektorer i $\mathbb{R}^2$. Trippeln $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ spänner upp $\mathbb{R}^2$, men är linjärt beroende.



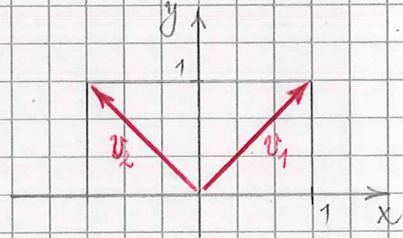
Bevis.
$$\begin{aligned} c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 &= c_1(1,0) + c_2(0,1) + c_3(1,1) \\ &= (c_1, 0) + (0, c_2) + (c_3, c_3) \\ &= (c_1 + c_3, c_2 + c_3) \end{aligned}$$

Givet $w = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, så löser (c_1, c_2, c_3) ekvationen $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = w$ $(*_w)$ omm

$$(c_1 + c_3, c_2 + c_3) = (x,y) \iff \begin{cases} c_1 + c_3 = x \\ c_2 + c_3 = y \end{cases}$$

Vi läser av att $(*_w)$ har oändligt många lösningar $(c_1, c_2, c_3) = (x-t, y-t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, för varje $w \in \mathbb{R}^2$. I synnerhet har $(*_0)$ en icketrivial lösning, exvis $(c_1, c_2, c_3) = (1,1,-1)$, medan $(*_w)$ är lösbar för alla $w \in \mathbb{R}^2$. $\square$

Ex. 3 $v_1 = (1,1)$ och $v_2 = (-1,1)$ är vektorer i $\mathbb{R}^2$. Paret $\underline{v} = (v_1, v_2)$ är linjärt oberoende och spänner upp $\mathbb{R}^2$. Alltså är $\underline{v}$ en bas för $\mathbb{R}^2$.



Bevis.
$$\begin{aligned} c_1 v_1 + c_2 v_2 &= c_1(1,1) + c_2(-1,1) \\ &= (c_1, c_1) + (-c_2, c_2) \\ &= (c_1 - c_2, c_1 + c_2) \end{aligned}$$

Givet $w = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, så löser (c_1, c_2) ekvationen $c_1 v_1 + c_2 v_2 = w$ $(*_w)$ omm

$$(c_1 - c_2, c_1 + c_2) = (x,y) \iff (-1) \begin{cases} c_1 - c_2 = x \\ c_1 + c_2 = y \end{cases} \iff \tfrac{1}{2} \cdot \begin{cases} c_1 - c_2 = x \\ 2c_2 = -x + y \end{cases}$$

$$\iff (1) \begin{cases} c_1 - c_2 = x \\ c_2 = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y \\ c_2 = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y \end{cases}$$

Vi läser av att $(*_w)$ har precis en lösning för varje $w \in \mathbb{R}^2$. I synnerhet har $(*_0)$ endast den triviala lösningen, och $(*_w)$ är lösbar för alla $w \in \mathbb{R}^2$. $\square$

Definitionen för begreppet "bas" kan formuleras om så här. En följd av vektorer $\underline{v} = (v_1, \dots, v_\ell)$ är en bas i V om ekvationen $c_1 v_1 + \dots + c_\ell v_\ell = w$ $(*_w)$ är lösbar för alla $w \in V$, och entydigt lösbar för $w = 0$.

I exempel 3 hittade vi en bas $\underline{v}$ så att ekvationen $(*_w)$ är till och med entydigt lösbar för alla $w \in V$. Detta är dock ingen slump. Helt allmänt gäller följande

Sats. Om $\underline{v} = (v_1, \dots, v_\ell)$ är en bas i ett vektorrum V, då finns det för varje $w \in V$ precis en lösning $(c_1, \dots, c_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ till ekvationen

$$c_1 v_1 + \dots + c_\ell v_\ell = w .$$

Skalärna c_i kallas för w:s koordinater i basen $\underline{v}$, och ℓ-tippeln $(c_1, \dots, c_\ell)$ kallas för w:s koordinatvektor i $\underline{v}$.

Notation. $(w)_{\underline{v}} := (c_1, \dots, c_\ell)$.

Bevis. Låt $w \in V$. Låt $(c_1, \dots, c_\ell)$ och $(d_1, \dots, d_\ell)$ vara lösningar till $(*_w)$.

$$\begin{array}{rl} & c_1 v_1 + \dots + c_\ell v_\ell = w \\ -1 & d_1 v_1 + \dots + d_\ell v_\ell = w \\ \hline & (c_1 - d_1) v_1 + \dots + (c_\ell - d_\ell) v_\ell = 0 \qquad (*_0) \end{array}$$

$$\Rightarrow (c_1 - d_1, \dots, c_\ell - d_\ell) = (0, \dots, 0)$$

$$\Rightarrow (c_1, \dots, c_\ell) = (d_1, \dots, d_\ell) .$$

$\square$

Vi avrundar detta ämne med några exempel.

Ex. 3 igen. Vi insåg att $\underline{v} = (v_1, v_2)$ med $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (-1,1)$ är en bas i $\mathbb{R}^2$. Dessutom kom vi fram till att ekvationen

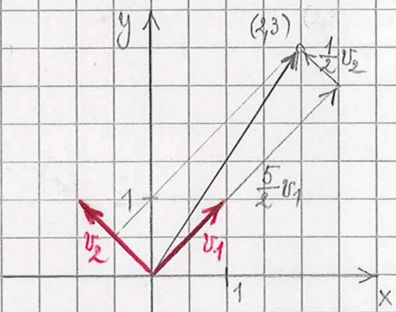
$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = w$$

har för varje $w = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ den entydiga lösningen

$$(c_1, c_2) = \left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y, -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y\right).$$

För $w = (2,3)$ ex. vis löses ekvationen $c_1 v_1 + c_2 v_2 = (2,3)$ entydigt av

$$(c_1, c_2) = \left(\tfrac{1}{2}2 + \tfrac{1}{2}3, -\tfrac{1}{2}2 + \tfrac{1}{2}3\right) = \left(\tfrac{5}{2}, \tfrac{1}{2}\right).$$



I själva verket gäller ju

$$\tfrac{5}{2}(1,1) + \tfrac{1}{2}(-1,1) = (2,3).$$

Koordinatvektorn för $w = (2,3)$ i basen $\underline{v}$ är alltså $((2,3))_{\underline{v}} = \left(\tfrac{5}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$.

Ex. 4 I $\mathbb{R}^3$ bildar vektorerna $e_1 = i = (1,0,0)$, $e_2 = j = (0,1,0)$, $e_3 = k = (0,0,1)$ en bas $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3) = (i, j, k)$, kallad standardbasen. För varje vektor $w = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ är dess koordinatvektor i standardbasen lika med

$$(w)_{\underline{e}} = (x,y,z) = w \quad .$$

Figur!

Bevis. $$c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 = c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,1)$$
$$= (c_1,0,0) + (0,c_2,0) + (0,0,c_3)$$
$$= (c_1, c_2, c_3)$$

Givet $w = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, så löser (c_1, c_2, c_3) ekvationen $c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 = w \quad (*_{10})$

omm $(c_1, c_2, c_3) = (x, y, z)$. Alltså är $(*_w)$ entydigt lösbar för alla $w \in \mathbb{R}^3$, vilket innebär att $\underline{e}$ är en bas. Desutom är

$$(w)_{\underline{e}} = (c_1, c_2, c_3) = (x, y, z) = w. \qquad \square$$

Ex. 5 I $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bildar matriserna $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en bas $\underline{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$, kallad standardbasen. Koordinatvektorn för en godtycklig matris $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ är $(A)_{\underline{E}} = (A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22})$.

Bevis. För varje matris $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ löses ekvationen

$$c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3 + c_4 E_4 = A \qquad (*_A)$$

entydigt av $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22})$. $\square$

Ibland skriver man koordinatvektorn $(w)_{\underline{v}} = (c_1, \dots, c_\ell)$ som kolonn, och man använder då hakparentesnotationen

$$[w]_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_\ell \end{pmatrix} = w\text{:s koordinatkolonn i basen } \underline{v} = (v_1, \dots, v_\ell).$$

Ex. 6 Visa att $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ bildar en bas $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\mathbb{R}^{3\times 1}$, samt att koordinatkolonnen för en godtycklig kolonn $w \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ är $[w]_{\underline{a}} = A^{-1} w$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

<u>Bevis.</u> Vänsterledet i ekvationen $(*_w)$ är

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 4c_1 \\ 6c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c_2 \\ 0 \\ 7c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c_3 \\ 5c_3 \\ 8c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 + 3c_3 \\ 4c_1 \quad\quad + 5c_3 \\ 6c_1 + 7c_2 + 8c_3 \end{pmatrix} = Ac \ , \quad \text{där } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

För varje $w \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ kan vi alltså skriva $(*_w)$ som <u>matrisekvationen</u>

$$Ac = w \qquad (*_w)$$

(-3) (-2)

Dessutom är A inverterbar: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & -7 \\ 6 & -5 & -10 \end{vmatrix} = 80 - 35 = 45.$

Därför har $(*_w)$ för varje $w \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ den entydiga lösningen $c = A^{-1}w$.

Alltså är $\underline{a}$ en bas i $\mathbb{R}^{3\times 1}$, och $[w]_{\underline{a}} = c = A^{-1}w$. □

För $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ex.vis är $[w]_{\underline{a}} = A^{-1}w = \underbrace{\frac{1}{45}\begin{pmatrix} -35 & 5 & 10 \\ -2 & -10 & 7 \\ 28 & 5 & -8 \end{pmatrix}}_{\text{Se dugga 2007-09-19 : 4}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{45}\begin{pmatrix} -20 \\ -5 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/9 \\ -1/9 \\ 5/9 \end{pmatrix},$$

Detta betyder att $-\frac{4}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{5}{9}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, vilket ju stämmer.

Beviset till exempel 6 kan lätt generaliseras till ett bevis till följande

Sats. Låt $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ vara en följd av kolonner i $\mathbb{R}^{n\times 1}$, med tillhörande matris

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Om A inte är inverterbar, då är $\underline{a}$ inte någon bas i $\mathbb{R}^{n\times 1}$.

Om A är inverterbar, då är $\underline{a}$ en bas i $\mathbb{R}^{n\times 1}$, och för alla $w \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ är

$$\boxed{[w]_{\underline{a}} = A^{-1} w}.$$