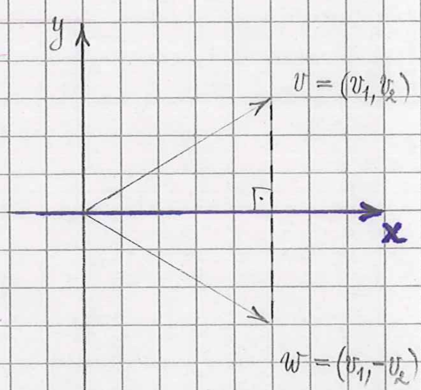
F14 Linjära avbildningar

Med "linjära avbildningar" avses sådana avbildningar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ som är hanterliga med matrisräkning. Vi inleder med två exempel.

Ex. 1 Avbildningen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(v) = w$, ges geometriskt av speglingen i x-axeln. Givet $v = (v_1, v_2)$, beskriv $w = (w_1, w_2)$ algebraiskt.



Lösning. Från figuren läser vi av att $w = (w_1, w_2) = (v_1, -v_2)$.
Alltså gäller ekvationssystemet

$$\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = -v_2 \end{cases},$$

vilket också kan uttryckas som en matrisekvation

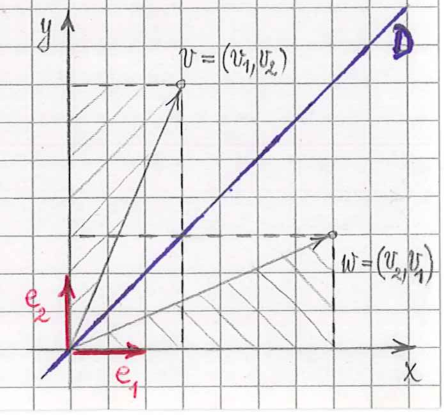
$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Koncist blir då

Svaret. $w = Av$,

där $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ och $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ skrivs som kolonner, och $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ex. 2 Avbildningen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(v) = w$, ges geometriskt av speglingen i diagonalen D. Givet $v = (v_1, v_2)$, beskriv $w = (w_1, w_2)$ algebraiskt.



Lösning. Med $e_1 = (1,0)$ och $e_2 = (0,1)$ gäller av geometriska skäl att $g(e_1) = e_2$ och $g(e_2) = e_1$. Då vi kan skriva

$$v = (v_1, v_2) = v_1(1,0) + v_2(0,1) = v_1 e_1 + v_2 e_2 ,$$

drar vi slutsatsen att

$$w = g(v) = g(v_1 e_1 + v_2 e_2) = g(v_1 e_1) + g(v_2 e_2) = v_1 g(e_1) + v_2 g(e_2)$$

$$= v_1 e_2 + v_2 e_1 = v_1 (0,1) + v_2 (1,0) = (v_2, v_1).$$

Alltså gäller ekvationssystemet

$$\begin{cases} w_1 = & v_2 \\ w_2 = v_1 & \end{cases},$$

vilket också kan uttryckas som en matrisekvation

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Svar. $w = B v$, där $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ och $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ skrivs som kolonner, och $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Generalisering. En allmän avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tillordnar en given vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ en ny vektor $f(x) = y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, där

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots\dots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

är m reellvärda funktioner av variablerna $x_1, \dots, x_n$.

En avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kallas linjär om alla funktioner $f_1, \dots, f_m$ ges av linjära ekvationer, dvs. om

$$\begin{cases} y_1 = a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \\ \dots\dots \\ y_m = a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \end{cases}$$

I så fall kan vi skriva

$$y = f(x)$$

på formen

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

eller koncist

$$y = Ax,$$

där $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ och $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ skrivs som kolonner, och $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

På det viset upprättas en korrespondens mellan linjära avbildningar $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och matriser $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, i följande bemärkelse. Givet en matris $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, så är avbildningen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = Ax$ linjär. Den betecknas $f = f_A$ och kallas vänstermultiplikation med A. Omvänt finns det till varje linjär avbildning $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ precis en matris $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ så att $f(x) = Ax \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Den betecknas $A = [f]$ och kallas för f:s matris.

Schematiskt.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{m\times n} & \longleftrightarrow & \{ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ är linjär} \} \\ A & \longmapsto & f_A \\ [f] & \longleftarrow\!\shortmid & f \end{array}$$

I exempel 1 är $[f] = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, och $f_A(x) = Ax = f(x)$.

I exempel 2 är $[g] = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, och $g_B(x) = Bx = g(x)$.

För att kunna tillämpa detta samband måste följande två allmänna problem lösas.

Problem 1. Givet en avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, hur avgör man om den är linjär?

Problem 2. Om f är linjär, hur finner man dess matris $[f]$?

Lösningarna till dessa problem ligger i följande två satser. (Se kursbok, sidorna 249 – 251.)

Sats 1. En avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är linjär omm den har följande två egenskaper:

(L1) $\quad f(v+w) = f(v) + f(w) \qquad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$

(L2) $\quad f(cv) = c f(v) \qquad \forall c \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^n$

Framöver skriver vi vektorer $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ som kolonner $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Kolonnerna

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bildar en bas $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ i $\mathbb{R}^n$, kallad standardbasen.

Sats 2. Om $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning, då har f:s matris $A = [f] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ formen

$$A = \left(f(e_1) \,\middle|\, f(e_2) \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, f(e_n) \right),$$

dvs. A är kolonnvis sammansatt utav standardbaskolonnernas bilder.

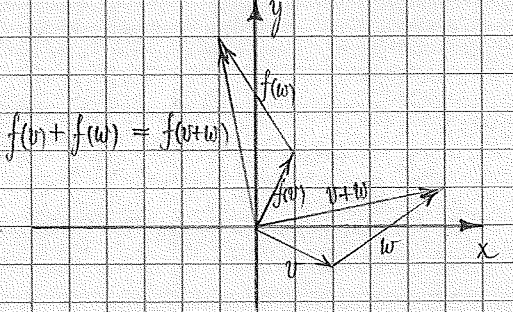
I exempel 1 är $A = [f] = \left(f(e_1) \,\middle|\, f(e_2) \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

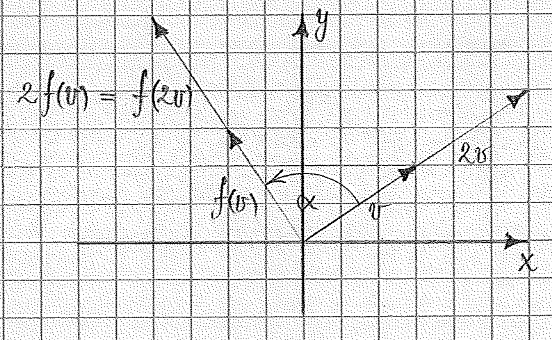
I exempel 2 är $B = [g] = \left(g(e_1) \,\middle|\, g(e_2) \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vi illustrerar Sats 1 och Sats 2 med ytterligare exempel.

Ex. 3 Avbildningen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges geometriskt som rotation moturs kring origo med vinkel α. Visa att f är linjär. Finn f:s matris.

Lösning. Av figurerna nedan framgår att rotationen har egenskaperna (L1) och (L2). Enligt Sats 1 är då f linjär. (I figurerna är $\alpha = 90°$.)





$$\left.\begin{array}{l} f(e_1) = f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} \\ \\ f(e_2) = f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix} \end{array}\right\} \underset{\text{Sats 2}}{\Rightarrow} \quad [f] = \big(f(e_1)\,\big|\,f(e_2)\big) = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Se föreläsning 10, exempel 2

Ex. 4 Genom att vrida vektorn $v = (3,4)$ moturs kring origo med $120°$ fås vektorn w. Bestäm dess komponenter w_1 och w_2.

Lösning. $w = f(v)$, där f är vridningen moturs med $120°$. Enligt exempel 3 är f linjär, och

$$A = [f] = \begin{pmatrix}\cos 120° & -\sin 120°\\ \sin 120° & \cos 120°\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

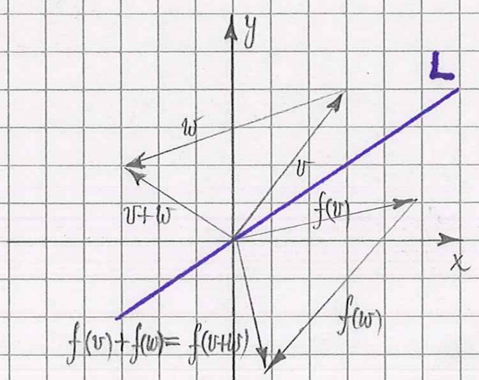
Alltså är

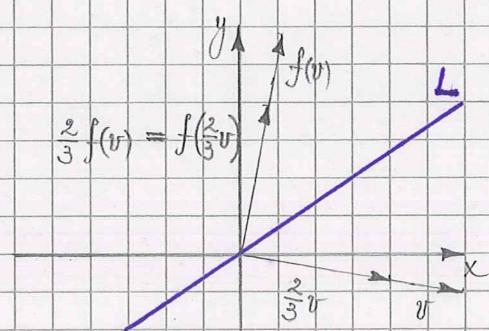
$$w = f(v) = Av = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 - \sqrt{3}\,4 \\ \sqrt{3}\,3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - 2\sqrt{3} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} - 2 \end{pmatrix}.$$

Svar. $w_1 = -\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}$, $w_2 = \frac{3}{2}\sqrt{3} - 2$.

Ex. 5 Avbildningen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges geometriskt som spegling i linjen L som går genom origo och bildar vinkeln α med den positiva x-axeln. Visa att f är linjär. Finn f:s matris.

Lösning. Av figurerna nedan framgår att speglingen har egenskaperna (L1) och (L2). Enligt Sats 1 är då f linjär.





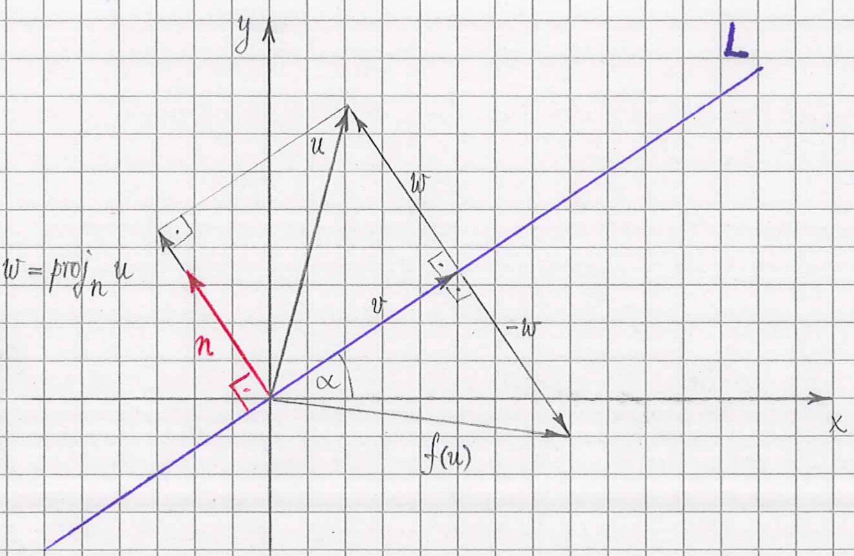
Enligt Sats 2 är $[f] = (f(e_1) \mid f(e_2))$. För att komma fram till $f(e_1)$ och $f(e_2)$ undersöker vi först $f(u)$ för en godtycklig vektor $u \in \mathbb{R}^2$. Vi skriver u på formen

$$u = v + w, \quad \text{där } v \text{ ligger på } L \text{ och } w \perp L \text{ (se figur nedan). Sedan är}$$

$$f(u) = f(v+w) \underset{(L1)}{=} f(v) + f(w) \underset{\text{Spegling}}{=} v - w = v + w - 2w = u - 2w.$$

För att komma fram till w väljer vi en normalvektor $n \perp L$, och sedan är

$$w = \text{proj}_n u = \frac{u \cdot n}{\|n\|^2}\, n.$$



Sammanfattningsvis gäller

$$\boxed{f(u) = u - 2\frac{u \cdot n}{\|n\|^2}\, n} \qquad \forall u \in \mathbb{R}^2$$

Som normalvektor väljer vi $n = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$. Då är $\|n\| = 1$, och vi beräknar

$$f(e_1) = e_1 - 2(e_1 \cdot n)\, n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2(-\sin\alpha)\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\sin\alpha \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 2\sin^2\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{samt}$$

$$f(e_2) = e_2 - 2(e_2 \cdot n)\, n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\cos\alpha \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\alpha\sin\alpha \\ 1 - 2\cos^2\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \sin^2\alpha - \cos^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 2\alpha \\ -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

<u>Svar.</u> $[f] = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$.

Exempel 1 och 2 återfås som specialfall till svaret ovan, då $\alpha = 0°$ respektive $\alpha = 45°$.