F 15

Linjära operatorer på $\mathbb{R}^3$

Kom ihåg att en linjär avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ har formen $f(x) = Ax$, där $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
I specialfallet $m = n$ kallas den för en linjär operator på $\mathbb{R}^n$. En linjär operator $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ har alltså formen $f(x) = Ax$, där $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är en kvadratisk matris. På förra föreläsningen studerade vi två typer av linjära operatorer på $\mathbb{R}^2$, nämligen

1. Speglingen i en linje genom origo, och

2. Rotationen kring origo med en viss vinkel.

Nu ska vi vidga horisonten genom att studera tre typer av linjära operatorer på $\mathbb{R}^3$, nämligen

3. Speglingen i ett plan genom origo,

4. Rotationen kring en riktad axel med en viss vinkel, och

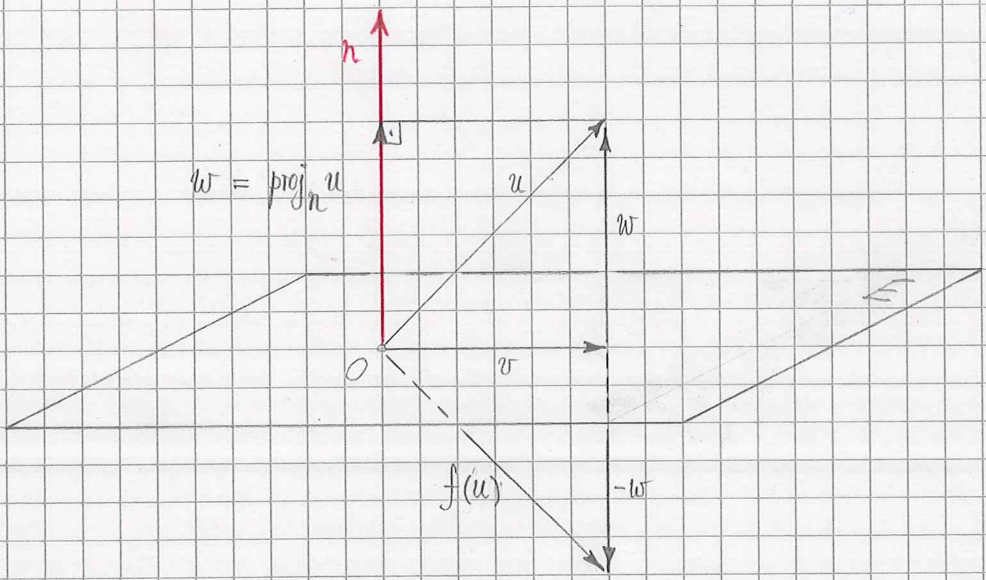
5. Projektionen på ett plan genom origo parallellt med en linje genom origo.

Med speglingen i ett plan E genom origo menas följande linjär operator f på $\mathbb{R}^3$.
Varje vektor $v \in E$ avbildas på $f(v) = v$.
Varje vektor $w \perp E$ avbildas på $f(w) = -w$.
Varje vektor $u \in \mathbb{R}^3$ skrivs på formen $u = v + w$ där v, w som ovan, och avbildas på

$$f(u) = f(v+w) \underset{(L1)}{=} f(v) + f(w) \underset{\text{spegling}}{=} v - w$$

$$= v + w - 2w = u - 2w$$

$$= u - 2\,\mathrm{proj}_n u \quad , \quad \text{där } n \perp E$$



Därmed har vi härlett följande formel för speglingen i planet genom O med normalvektor n.

$$\boxed{f(u) = u - 2\,\text{proj}_n u}$$

Ex. 1 Operatorn $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges som spegling i planet $E: x + y + z = 0$. Finn f:s matris.

Lösning.
$$[f] = \left(f(e_1) \,\middle|\, f(e_2) \,\middle|\, f(e_3) \right), \quad \text{där}$$

$$f(e_j) = e_j - 2\,\text{proj}_n e_j = e_j - 2\,\frac{e_j \cdot n}{\|n\|^2}\, n \qquad \text{och} \qquad n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

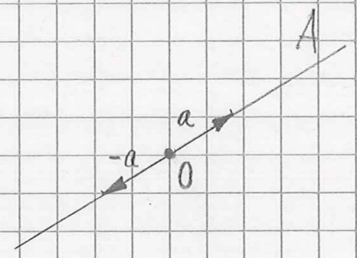
$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\,\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\,\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\,\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Svar.
$$[f] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

En riktad axel A_a är en linje A genom origo, tillsammans med en vald riktningsvektor a av längd 1. (Det finns två vektorer att välja på, nämligen a och $-a$.)



Med rotationen kring en riktad axel med vinkel α menas följande linjär operator f på $\mathbb{R}^3$.

Varje $v \in A$ avbildas på $f(v) = v$.

Varje $w \perp A$ avbildas på $f(w) = (\cos\alpha)\, w + (\sin\alpha)(a \times w)$

Varje $u \in \mathbb{R}^3$ skrivs på formen $u = v + w$ där v, w som ovan, och avbildas på

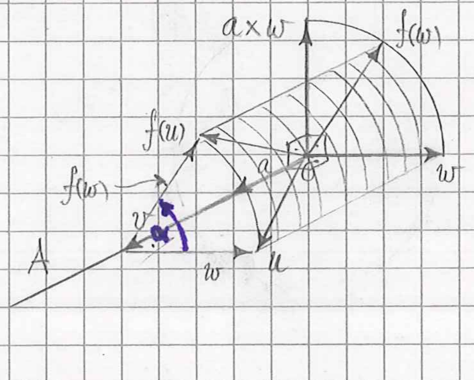
$$f(u) = f(v+w) \underset{(L1)}{=} f(v) + f(w) \underset{\text{rotation}}{=} v + (\cos\alpha)\, w + (\sin\alpha)(a \times w)$$

Dessutom är

$$\begin{cases} v = \operatorname{proj}_a u = (u \cdot a)\, a \\ w = u - \operatorname{proj}_a u = u - (u \cdot a)\, a \end{cases}$$

Alltså blir formeln för rotationen kring A_a med vinkel α den här:

$$\boxed{f(u) = (u \cdot a)\, a + (\cos\alpha)\big(u - (u \cdot a)\, a\big) + (\sin\alpha)(a \times u)}$$



Ex. 2 Operatorn $f: R^3 \to R^3$ ges som rotation kring den riktade axeln A_a med $120°$, där $a = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Finn f:s matris.

Lösning. $$[f] = \left(f(e_1) \middle| f(e_2) \middle| f(e_3) \right), \quad \text{där}$$

$$f(e_j) = (e_j \cdot a)\, a + (\cos\alpha)\left(e_j - (e_j \cdot a) a\right) + (\sin\alpha)(a \times e_j)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(e_j - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{3}}\left((1,1,1) \times e_j\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(e_j - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right) + \frac{1}{2}\left((1,1,1) \times e_j\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} e_j + \frac{1}{2}\left((1,1,1) \times e_j\right).$$

Därmed blir

$$f(e_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) + \frac{1}{2}(0, 1, -1)$$

$$= \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = (0,1,0) = e_2$$

$$f(e_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \left(0, \frac{1}{2}, 0\right) + \frac{1}{2}(-1, 0, 1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = (0,0,1) = e_3$$

$$f(e_3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \left(0, 0, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(1, -1, 0)$$

$$= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) = (1,0,0) = e_1$$

Svar. $$[f] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En allmän vektor $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avbildas då på $f(u) = [f]\,u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$.

Med projektionen på ett plan E genom origo parallellt med en linje L genom origo menas följande linjär operator f på $\mathbb{R}^3$.

Varje $v \in E$ avbildas på $f(v) = v$.

Varje $w \in L$ avbildas på $f(w) = 0$.

Varje $u \in \mathbb{R}^3$ skrivs på formen $u = v + w$ där v, w som ovan, och avbildas på

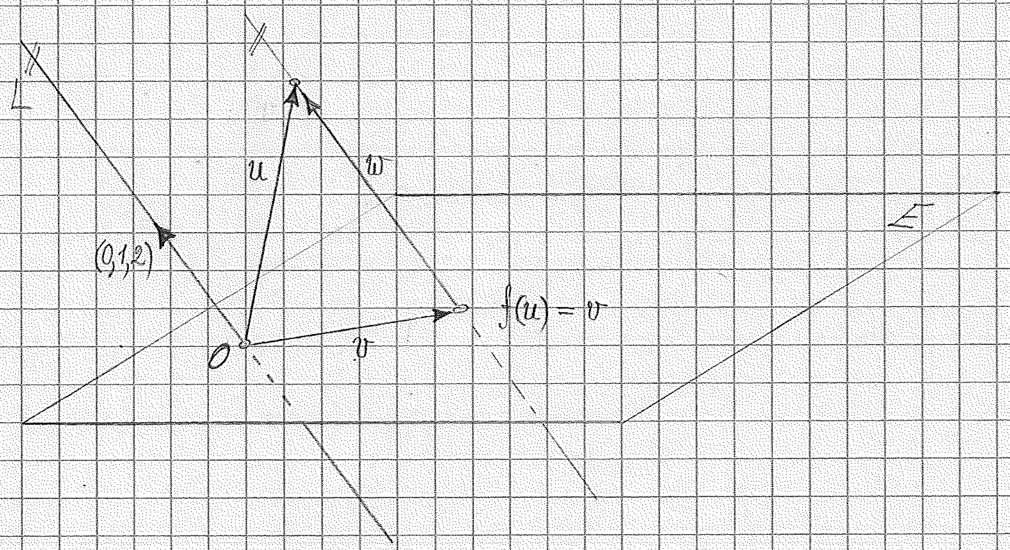
$$f(u) = f(v+w) \underset{(L1)}{=} f(v) + f(w) = v + 0 = v$$

(Se figuren i Exempel 3 nedan.)

Exempel 3

Den linjära operatorn $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges geometriskt som projektionen parallellt med linjen $L: (x,y,z) = t(0,1,2)$ på planet $E: x + 2y + 3z = 0$. Bestäm f:s matris.

Lösning. $[f] = \left(f(e_1) \middle| f(e_2) \middle| f(e_3) \right)$, där $f(e_j)$ är skärningspunkten av linjen $(x,y,z) = e_j + t(0,1,2)$ med planet E



$f(e_1)$ ligger på linjen $(x,y,z) = (1,0,0) + t(0,1,2) = (1, t, 2t)$ och i E, uppfyller alltså

$$0 = 1 + 2t + 6t = 1 + 8t \Rightarrow t = -\frac{1}{8} \Rightarrow f(e_1) = \left(1, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}\right).$$

$f(e_2)$ ligger på linjen $(x,y,z) = (0,1,0) + t(0,1,2) = (0, 1+t, 2t)$ och i E, uppfyller alltså

$$0 = 2(1+t) + 6t = 2 + 8t \Rightarrow t = -\frac{1}{4} \Rightarrow f(e_2) = \left(0, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right).$$

$f(e_3)$ ligger på linjen $(x,y,z) = (0,0,1) + t(0,1,2) = (0, t, 1+2t)$ och i E, uppfyller alltså

$$0 = 2t + 3(1+2t) = 3 + 8t \Rightarrow t = -\frac{3}{8} \Rightarrow f(e_3) = \left(0, -\frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right).$$

Svar. $$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/8 & 3/4 & -3/8 \\ -1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$