F16 Sammansättning och inverterbarhet

Avbildningar kan sammansättas.

Ex. 1. Avbildningen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges som $f(x) = \sin x$.
Avbildningen $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges som $g(x) = x^2$.

Den sammansatta avbildningen $gf: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges då av

$$gf(x) := g(f(x)) = g(\sin x) = (\sin x)^2 ,$$

medan den sammansatta avbildningen $fg: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av

$$fg(x) := f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2)$$

Även linjära avbildningar kan sammansättas.

Ex. 2. Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara speglingen i x-axeln, och låt $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara speglingen i diagonalen. Låt $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den sammansatta avbildningen $h = gf$. Visa att h är linjär. Finn h:s matris. Tolka operatorn h geometriskt.

Lösning. Vi vet att både f och g är linjära, och att de därmed uppfyller (L1) och (L2).
Vi verifierar att även h uppfyller (L1) och (L2):

$$h(v+w) = g(f(v+w)) = g(f(v)+f(w)) = g(f(v)) + g(f(w)) = h(v) + h(w)$$

$$h(cv) = g(f(cv)) = g(c f(v)) = c\, g(f(v)) = c\, h(v)$$

Då h uppfyller (L1) och (L2) är h linjär.

$$[h] = \big(h(e_1)\,\big|\,h(e_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{då}$$

$$h(e_1) = g(f(e_1)) = g(e_1) = e_2$$

$$h(e_2) = g(f(e_2)) = g(-e_2) = -e_1$$

Låt $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara rotationen moturs kring origo med vinkel $\frac{\pi}{2}$. Då är

$$[r] = \big(r(e_1)\,\big|\,r(e_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = [h], \quad \text{alltså}$$

$$h(x) = [h]x = [r]x = r(x) \quad \forall\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \text{alltså} \quad h = r.$$

<u>Facit.</u> $[h] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = [r]$ <u>visar att</u> $h = gf = r$.

Allmänt gäller för sammansättningen av linjära avbildningar följande

<u>Sats.</u> <u>Om avbildningen</u> $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ <u>är linjär med</u> $[f] = A$, <u>och avbildningen</u> $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ <u>är linjär med</u> $[g] = B$, <u>då är även den sammansatta avbildningen</u> $gf : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ <u>linjär</u>, <u>med</u>

$$\boxed{[gf] = BA = [g][f]}$$

<u>Schematiskt.</u>

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^\ell & \mathbb{R}^m \arrow[l, "g"', "B"] & \mathbb{R}^n \arrow[l, "f"', "A"] \arrow[ll, bend right, "gf"', "BA"] \end{tikzcd}$$

<u>Bevis.</u> För alla $x \in \mathbb{R}^n$ gäller

$$gf(x) = g(f(x)) = g(\underbrace{Ax}_{y \in \mathbb{R}^m}) = B(Ax) = (BA)x. \qquad \square$$

Tillämpning. Låt $r_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara rotationen moturs kring origo med vinkel α. Vi vet att

$$[r_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

För alla vinklar α, β gäller

$$r_\alpha r_\beta = r_{\alpha+\beta}.$$

Enligt satsen följer då att

$$[r_{\alpha+\beta}] = [r_\alpha r_\beta] = [r_\alpha][r_\beta],$$

alltså

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix},$$

vilket bevisar de trigonometriska formlerna

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}}$$

En linjär operator $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kallas inverterbar om det finns en linjär operator $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ så att

$$gf(x) = x = fg(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

I så fall kallas g inversen till f och betecknas $g = f^{-1}$.

Ex. 3. Låt $s: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara speglingen i ett plan. Man inser geometriskt att

$$ss(x) = x = ss(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Alltså är s inverterbar, och $s^{-1} = s$.

Ex. 4. Låt $r_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara rotationen kring en riktad axel med vinkel α. Man inser geometriskt att

$$r_{-\alpha} r_\alpha (x) = x = r_\alpha r_{-\alpha}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Alltså är r_α inverterbar, och $r_\alpha^{-1} = r_{-\alpha}$.

Ex. 5. Låt $p: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara projektionen på ett plan E genom origo parallellt med en linje L genom origo. Då är p inte inverterbar.

Bevis. Välj olika vektorer $v \neq w$ på linjen L. Då är $p(v) = 0 = p(w)$.
Om p är inverterbar, då följer att

$$v = p^{-1}p(v) = p^{-1}(0) = p^{-1}p(w) = w$$

vilket strider mot att $v \neq w$. Alltså är p inte inverterbar.

Sats. En linjär operator $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är inverterbar omm dess matris $[f]$ är inverterbar. I så fall är inversens matris lika med matrisens invers:

$$\boxed{[f^{-1}] = [f]^{-1}}$$

Bevis. Antag att f:s matris $A = [f]$ är inverterbar. Då finns den inversa matrisen A^{-1}, och vi kan definiera operatorn

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad g(x) = A^{-1}x .$$

Den uppfyller för alla $x \in \mathbb{R}^n$

$$gf(x) = g(Ax) = A^{-1}(Ax) = (A^{-1}A)x = Ix = x, \quad \text{samt}$$

$$fg(x) = f(A^{-1}x) = A(A^{-1}x) = (AA^{-1})x = Ix = x .$$

Alltså är f inverterbar, och $f^{-1} = g$, och $[f^{-1}] = [g] = A^{-1} = [f]^{-1}$.

Antag omvänt att operatorn f är inverterbar. Då finns den inversa operatorn f^{-1}, och matriserna $A = [f]$ samt $B = [f^{-1}]$. Ekvationerna

$$f^{-1}f(x) = x = ff^{-1}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

"medför att"

$$BA = I = AB .$$

Alltså är $[f]$ inverterbar, och $[f^{-1}] = B = A^{-1} = [f]^{-1}$. $\square$

Övning. Förklara själv varför "medför att" gäller!

Ex. 6. Låt s vara speglingen i planet $E: x+y+z=0$. På F15 beräknade vi s:s matris och fann att

$$[s] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Utan räkning inser vi nu att matrisen $[s]$ är inverterbar då operatorn s är inverterbar, samt att

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} = [s]^{-1} \underset{\text{Sats}}{=} [s^{-1}] \underset{\text{Ex.3}}{=} [s] = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Ex. 7. Låt r_α vara rotationen med vinkel $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ kring den riktade axeln A_a, där $a = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. På F15 beräknade vi r_α:s matris och fann att

$$[r_\alpha] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utan räkning inser vi nu att matrisen $[r_\alpha]$ är inverterbar då operatorn r_α är inverterbar, samt att

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = [r_\alpha]^{-1} \underset{\text{Sats}}{=} [r_\alpha^{-1}] \underset{\text{Ex.4}}{=} [r_{-\alpha}] \underset{3\alpha = 2\pi}{=} [r_{2\alpha}] = [r_\alpha r_\alpha] \underset{\text{Sats}}{=}$$

$$= [r_\alpha][r_\alpha] = \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ex. 8. Låt p vara projektionen på planet $E: x+2y+3z=0$ parallellt med linjen $L: (x,y,z) = t(0,1,2)$, där $t \in \mathbb{R}$. På F15 beräknade vi p:s matris och fann att

$$[p] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Utan räkning inser vi nu att matrisen $[p]$ inte är inverterbar, då operatorn p inte är inverterbar. (Kolla själv att $\det[p] = 0$.)

Ex. 9. Avgör om operatorn $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2) = (x_1+2x_2, -x_1+x_2)$ är inverterbar. Om så är fallet, ange $f^{-1}(y_1,y_2)$.

Lösning. $A = [f] = \left[f(e_1) \,\middle|\, f(e_2) \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ är inverterbar, då $\det(A) = 3$.

Alltså är f inverterbar, och

$$f^{-1}(y_1,y_2) = [f^{-1}] \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{y} \underset{\text{Sats}}{=} [f]^{-1} y = A^{-1} y = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3} y_1 - \frac{2}{3} y_2 , \frac{1}{3} y_1 + \frac{1}{3} y_2 \right).$$

Svar. f är inverterbar, och $f^{-1}(y_1,y_2) = \left(\frac{1}{3} y_1 - \frac{2}{3} y_2 , \frac{1}{3} y_1 + \frac{1}{3} y_2 \right)$.