F2

Gaussalgoritm

Gaussalgoritmen är en metod som löser varje linjärt ekvationssystem. Grundtanken är att ersätta det givna systemet med ett nytt system som har

a) samma lösningsmängd L som det givna systemet, och

b) en så enkel gestalt (kallad trappstegsformen) att L kan läsas av.

Följande såkallade elementära operationer (= elementära transformationer) ändrar L inte:

1. Multiplicera en ekvation med en nollskild konstant.
2. Kasta om två ekvationer.
3. Addera en multipel av en ekvation till en annan ekvation.

Linjära ekvationssystem | Tillhörande matriser

Ex. 1

$$(-2)\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \end{cases} \sim \qquad (-2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ \frac{1}{2}\cdot \quad 2y - 7z = -17 \end{cases} \sim \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ \frac{1}{2}\cdot\; 0 & 2 & -7 & -17 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ (-1)\quad y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \end{cases} \sim \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ (-1)\; 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \end{pmatrix} \sim$$

pivotvariabler

$$\begin{cases} x + \frac{11}{2}z = \frac{35}{2} \\ y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \end{cases} \sim \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \end{pmatrix}$$ trappstegsform

frivariabel

$$\begin{cases} x = \frac{35}{2} - \frac{11}{2}z \\ y = -\frac{17}{2} + \frac{7}{2}z \end{cases}$$

Sätt $z = t \in \mathbb{R}$. Då är $\left(\frac{35}{2} - \frac{11}{2}t, -\frac{17}{2} + \frac{7}{2}t, t\right)$ systemets allmänna lösning.

Lösningsmängden är $L = \left\{\left(\frac{35}{2} - \frac{11}{2}t, -\frac{17}{2} + \frac{7}{2}t, t\right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$.

Problem. Givet ett linjärt ekvationssystem, bestäm dess lösningsmängd L.

Lösning (Gaussalgoritm). Transformera det givna systemet till ett nytt system med samma lösningsmängd L, och med matris på trappstegsform. Läs av L från trappstegsformen.

Återstår att precisera tre saker:

I. Vad är en trappstegsmatris?

II. Hur läser man av L från systemets trappstegsmatris?

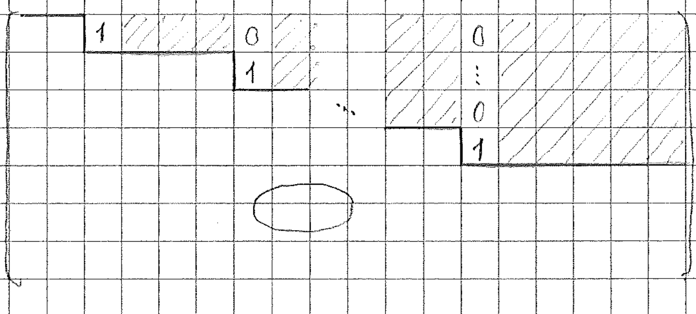
III. Hur transformerar man en given matris till en trappstegsmatris?

I. En matris är en rektangulär uppsättning tal. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

har m rader och n kolonner. Elementet a_{ij} sitter på plats ij, dvs. i rad i och kolonn j.

En matris A kallas trappstegsmatris om man kan rita in en trappa i A,

$A =$ 

, så att

(a) trappan börjar i matrisens övre vänstra hörn, är sammansatt av horisontella streck — och hörn ⌊,
och slutar i matrisens högra parentes;

(b) under trappan finns idel nollor,

(c) på hörnplatserna finns idel ettor (så kallade pivotelement),

(d) ovanför varje pivotelement finns idel nollor.

<u>Ex. 2</u> <u>Trappstegsmatriser (tm) eller icke-tm?</u>

a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ & & 1 & 7 \end{pmatrix} \; ① \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ & & 1 & 7 \end{pmatrix} = A'$$

ej tm — tm

b) $$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = B'$$

ej tm — tm

c) $$C = \begin{pmatrix} & 1 & & 3 \\ 1 & & & 2 \\ & & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & 2 \\ & 1 & & 3 \\ & & 1 & 4 \end{pmatrix} = C'$$

ej tm — tm

<u>En liten ordbok.</u>

Vår terminologi	Kursbokens terminologi
Systemets matris	Augmented matrix of the system
Trappstegsmatris	Matrix in reduced row-echelon form
Gaussalgoritm	Gauss-Jordan elimination
Systemet har $\begin{cases} \text{minst en lösning} \\ \text{ingen lösning} \end{cases}$	The system is $\begin{cases} \text{consistent} \\ \text{inconsistent} \end{cases}$

II. Läs av lösningsmängden L från trappstegsmatriserna i Ex. 2.

a) Matrisen $A' = \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$ svarar mot systemet

pivotvariabler

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ \qquad\quad z = 7 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 4 - 2y \\ z = 7 \end{cases}$$

icke-pivotvariabel = fri variabel: flyttas till högerledet

Sätt $y = t \in \mathbb{R}$. Då är $(4-2t, t, 7)$ den allmänna lösningen.

Svar. $L = \{(4-2t, t, 7) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Obs. L är oändlig, då systemet har en fri variabel (nämligen y). De fria variablerna svarar mot de icke-pivotkolonnerna i trappstegsmatrisen, undantagen den sista kolonnen (som består av systemets högerled).

b) Matrisen $B' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ svarar mot systemet $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ \qquad\quad z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \end{cases}$, vilket saknar lösning.

Svar. $L = \emptyset$.

Obs. L är tom, då trappan slutar i ett hörn (vilket ger upphov till den olösbara ekvationen $0x+0y+0z = 1$).

c) Matrisen $C' = \begin{pmatrix} 1 & & & 2 \\ & 1 & & 3 \\ & & 1 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$ svarar mot systemet $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \\ 0x+0y+0z = 0 \end{cases}$

Svar. $L = \{(2,3,4)\}$.

Obs. L innehåller precis en lösning, då trappan är regelbunden (dvs består av idel hörn) bortsett från den sista kolonnen (där den slutar horisontellt).

Sammanfattning.

Om trappan slutar i ett hörn, då finns det ingen lösning.

Om trappan slutar horisontellt, då finns det minst en lösning.

Om trappan slutar horisontellt och är regelbunden före den sista kolonnen, då finns det precis en lösning.

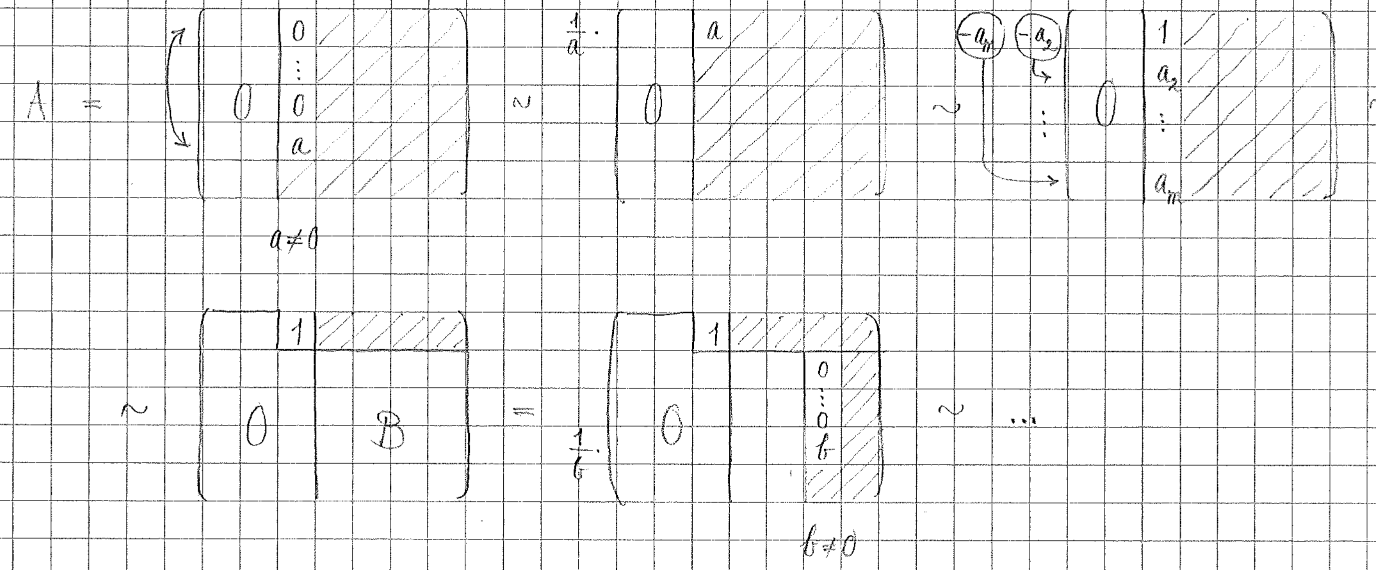
Om trappan slutar horisontellt och är oregelbunden före den sista kolonnen, då finns det oändligt många lösningar.

III. Ex. 3

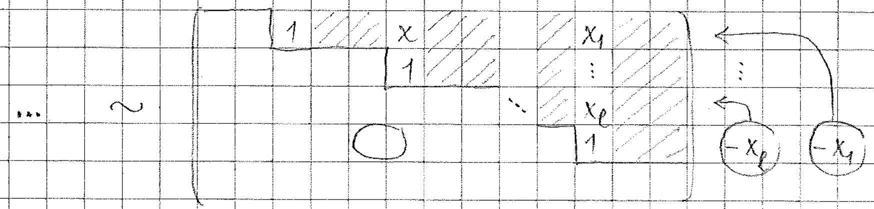
$$A = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2&2&2&0\\-2&5&2&1\\8&1&4&-1\end{pmatrix} \sim \;(-8)\;(2)\begin{pmatrix}1&1&1&0\\-2&5&2&1\\8&1&4&-1\end{pmatrix} \sim \;(1)\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&7&4&1\\0&-7&-4&-1\end{pmatrix} \sim$$

$$\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&7&4&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \sim \;(-1)\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&\frac{4}{7}&\frac{1}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{7}&-\frac{1}{7}\\0&1&\frac{4}{7}&\frac{1}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix} = T$$

Allmän strategi för transformationen.



Fortsätt med B exakt som med A ovan



Fortsätt på samma vis att transformera alla element ovanför pivotelementen till nollor. (Det minskar jobbet och risken att räkna fel om <u>man börjar med den sista pivotkolonnen och fortsätter åt vänster med den näststista pivotkolonnen, osv.</u>)