F3

Matrisräkning

Matriser kan ses som generaliseringar av tal. Idag ska vi lära oss hur man räknar med dem.
Matrisräkning tillämpas på alla ämnen (även de geometriska!) som ingår i denna kurs.

En matris är en rektangulär uppsättning tal. En allmän matris skrivs

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Den har m rader och n kolonner, och sägs ha storlek $m \times n$.

Ex. 1 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ har storlek 2×3 ; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ har storlek 3×2 ;

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ har storlek 1×3 ; $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ har storlek 3×1 .

Skrivsätt: $a \in \mathbb{R}$ betyder "a är ett reellt tal".

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ betyder "A är en reell matris av storlek $m\times n$".

Komplexa matriser finns också, men de förekommer inte i denna kurs.

Två matriser kallas lika om de har samma storlek och lika element på samma platser.

Ex. 2 För $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & x \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ gäller att

$A = B \iff x = 3$

$A \neq C$ och $B \neq C$ för alla x.

Ex. 3 $\begin{pmatrix} 2x + 3y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$

Mer allmänt kan varje linjärt ekvationssystem skrivas som en enda ekvation av kolonner.

Räknesätten för matriser. Matriser kan man

$$\left.\begin{array}{l}\text{addera} \\ \text{subtrahera} \\ \text{multiplicera med skalärer (= reella tal)}\end{array}\right\} \text{inga konstigheter}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{multiplicera med varandra} \\ \text{transponera} \\ \text{dividera med varandra (i viss mening)}\end{array}\right\} \text{med konstigheter}$$

Addition och subtraktion.

Ex. 4 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

Allmänt. Två matriser av samma storlek $\begin{cases} \text{adderas} \\ \text{subtraheras} \end{cases}$ genom att $\begin{cases} \text{addera} \\ \text{subtrahera} \end{cases}$ deras element som står på samma platser.

Formellt: $A_{ij} + B_{ij} = (A+B)_{ij}$

$A_{ij} - B_{ij} = (A-B)_{ij}$

Obs. Matriser av olika storlek kan varken adderas eller subtraheras!

Multiplikation med skalärer.

Ex. 5 $\quad 5\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$

Allmänt. En matris A multipliceras med en skalär c genom att multiplicera alla element i A med c.

Formellt: $\quad cA_{ij} = (cA)_{ij}$

Ex. 6 $\quad -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} := (-1)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Allmänt. $\quad -A := (-1)A$

Multiplikation av matriser. (Viktigaste räknesättet!)

Ex. 7 $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \end{pmatrix}$

Ex. 8 $\quad \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_\ell \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + \dots + a_\ell b_\ell \end{pmatrix}$

Ex. 9 $\quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 4\cdot(-1) + 2\cdot 1 & 1\cdot 0 + 4\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 3 + 1\cdot(-1) + 5\cdot 1 & 3\cdot 0 + 1\cdot 2 + 5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 13 & 7 \end{pmatrix}$

Allmänt. Om $A \in \mathbb{R}^{m\times \ell}$ och $B \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$, då är $AB \in \mathbb{R}^{m\times n}$ och

$$(AB)_{ij} = \begin{pmatrix} A_{i1} & \dots & A_{i\ell} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ B_{\ell j} \end{pmatrix} = A_{i1}B_{1j} + \dots + A_{i\ell}B_{\ell j}$$

Obs. Om $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$ och $B \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ och $k \neq \ell$, då är AB ej definierad!

Ex. 10 $\qquad \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 8 & 12\\5 & 10 & 15\\6 & 12 & 18\end{pmatrix}$ $\qquad$ Jfr. med Ex. 7 !

Ex. 11 $\quad$ Lös matrisekvationen $AX = XA$, då $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

Lösning. För att AX ska finnas måste

$$2 = \text{antalet kolonner i } A = \text{antalet rader i } X.$$

För att XA ska finnas måste

$$\text{antalet kolonner i } X = \text{antalet rader i } A = 2.$$

För att AX och XA ska finnas måste $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Vi söker alltså alla matriser

$$X = \begin{pmatrix}w & x\\y & z\end{pmatrix} \quad \text{så att} \quad AX = XA.$$

Nu är

$$AX = \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w & x\\y & z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}w & x\\-y & -z\end{pmatrix}$$

och

$$XA = \begin{pmatrix}w & x\\y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}w & -x\\y & -z\end{pmatrix}.$$

Alltså är

$$AX = XA \iff \begin{pmatrix}w & x\\-y & -z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}w & -x\\y & -z\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x = -x\\y = -y\end{cases} \iff \begin{cases}x = 0\\y = 0\end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix}w & 0\\0 & z\end{pmatrix}, \quad \text{där } w, z \in \mathbb{R}.$$

Svar. $L = \left\{ \begin{pmatrix}w & 0\\0 & z\end{pmatrix} \;\middle|\; w, z \in \mathbb{R} \right\}$

I synnerhet inser vi att $AB = BA$ inte gäller som allmän räkneregel för matrisprodukten, då exvis

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}.$$

Matrismultiplikation är alltså inte kommutativ !

Följande räkneregler för matriser gäller:

$$A+B = B+A$$
$$(A+B)+C = A+(B+C)$$
$$(AB)C = A(BC)$$

Varning: $AB \neq BA$

$$(A+B)C = AC+BC$$
$$A(B+C) = AB+AC$$
$$(a+b)C = aC+bC$$
$$a(B+C) = aB+aC$$
$$(ab)C = a(bC)$$
$$(aB)C = a(BC) = B(aC)$$

Transponering.

Ex. 12 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Allmänt. Om $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, då fås A:s transponata $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ genom att skriva A:s rader som A^T:s kolonner, alternativt genom att skriva A:s kolonner som A^T:s rader.

Formellt: $A_{ij} = (A^T)_{ji}$

Räkneregler för transponering:

$$(A^T)^T = A$$
$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(cA)^T = cA^T$$
$$(AB)^T \overset{!}{=} B^T A^T$$

Varning: $(AB)^T \neq A^T B^T$

Ex. 13 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Allmänt kallas matriser A med egenskapen $A^T = A$ för symmetriska matriser.

Ex. 14 Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Tolka matrisekvationen $Ax = b$ som ett linjärt ekvationssystem.

Lösning. $Ax = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$ medför att

$$Ax = b \iff \begin{pmatrix} x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

Kolonnen $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ löser matrisekvationen $Ax = b$ om och endast om trippeln (x_1, x_2, x_3) löser systemet $\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$.

Ex. 15 Tolka det linjära ekvationssystemet $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -1 \end{cases}$ som en matrisekvation $Ax = b$.

Lösning. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{b} \iff Ax = b$

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}$$

Allmänt kan varje linjärt ekvationssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

skrivas som en matrisekvation

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b}$$

där $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ är systemets koefficientmatris, kolonnen $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ består av alla obekanta, och kolonnen $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ består av systemets samtliga högerled.

Ex. 16 Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Visa att AA^T är symmetrisk.

Lösning. $AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$ är symmetrisk.

Ex. 17 Låt $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Visa att AA^T är symmetrisk.

Lösning. $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$.