F4

Matrisinvers

Ex. 1 Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Då blir

$$A + O = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = A \quad , \text{ och}$$

$$AI = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = A$$

Allmänt kallas varje matris vars samtliga element är noll för nollmatris. Den betecknas med O.

Ex. vis är $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nollmatrisen av storlek 3×2.

Räkneregler för nollmatrisen.

$$A + O = A$$

$$A - A = O$$

$$AO = O = OA$$

Nollmatrisen spelar alltså för matrisräkningen samma roll som talet 0 för räkning med tal.

Enhetsmatris kallas varje kvadratisk matris med idel ettor på diagonalen och idel nollor utanför diagonalen. Den betecknas med I.

Ex. vis är $I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ enhetsmatrisen av storlek 3×3.

Räkneregel för enhetsmatrisen: $IA = A = AI$

Enhetsmatrisen spelar alltså för matrisräkningen samma roll som talet 1 för räkning med tal.

Kom ihåg att ett tal a kallas inverterbar om det finns ett tal x så att $ax = 1$.
I så fall kallas x för inversen till a, och man skriver $x = a^{-1}$.

Likadant kallas en matris A <u>inverterbar</u> om det finns en matris X så att $AX = I = XA$.
I så fall kallas X för <u>inversen</u> till A, och man skriver $X = A^{-1}$.

<u>Obs.</u> Om A är inverterbar, då är både A och A^{-1} kvadratiska av samma storlek $n \times n$.
Icke-kvadratiska matriser är alltså aldrig inverterbara.

<u>Bevis.</u> A inverterbar betyder att matrisekvationen $AX = I = XA$ har en lösning X.
Då I är kvadratisk av storlek $n \times n$ följer att

$$\begin{aligned} \text{antalet rader i } A &= \text{antalet rader i } AX = \text{antalet rader i } I = n, \\ \text{antalet kolonner i } A &= \text{antalet kolonner i } XA = \text{antalet kolonner i } I = n \end{aligned}$$

dvs $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. P.s.s. inses att $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Slutligen är $A^{-1} = X$. $\square$

<u>Ex. 2</u> För $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ uppfyller $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ekvationen

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = XA.$$

Alltså är A inverterbar, och $X = A^{-1}$.

<u>Ex. 3</u> För $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ har matrisekvationen $AX = I = XA$ ingen lösning. Alltså är A inte inverterbar.

<u>Bevis.</u> Då $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ är matrisekvationen $AX = I = XA$ meningsfull endast för $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Dock gäller för alla $X = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$ att

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w+y & x+z \\ w+y & x+z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ □

Obs. Om $AX = I = XA$ och $AY = I = YA$, då är $X = Y$.

M.a.o. Om inversen till A finns, då är den entydigt bestämd.

Bevis. $X = XI = X(AY) = (XA)Y = IY = Y$. □

Problem. Givet en kvadratisk matris A, avgör om den är inverterbar. Om så är fallet, bestäm A^{-1}.

Lösning. (Standardmetoden). Sätt upp $n \times 2n$-matrisen

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & & & 1 \end{array}\right).$$

Radtransformera A till sin trappstegsmatris T, och utför samtidigt samma transformation på I. Då blir

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} T & B \end{array}\right)$$

Om $T = I$, då är A inverterbar och $A^{-1} = B$.

Om $T \neq I$, då är A inte inverterbar.

Ex. 4 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$: $\quad (A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} T & B \end{array}\right)$$

$T = I \Rightarrow A$ är inverterbar, och $A^{-1} = B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Ex. 5 $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$: $(A|I) = \begin{pmatrix}1 & 1 & | & 1 & 0\\ 2 & 2 & | & 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & | & 1 & 0\\ 0 & 0 & | & -2 & 1\end{pmatrix} = (T|B)$

$T \neq I \Rightarrow A$ är ej inverterbar.

Ex. 6 Lös $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = b_1 \\ 2x_1 + x_2 = b_2 \end{cases}$ för alla $\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$.

Lösning. Systemet kan skrivas som matrisekvation $Ax = b$, där $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$.
Enligt Ex. 4 är A inverterbar och $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. Om x löser systemet, då gäller

$$Ax = b \Rightarrow x = Ix = A^{-1}Ax = A^{-1}b = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-b_1 + 2b_2\\ 2b_1 - b_2\end{pmatrix}$$

Omvänt löser $A^{-1}b$ systemet, då $A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Ib = b$.

Svar. $L = \left\{\left(-\frac{1}{3}b_1 + \frac{2}{3}b_2,\ \frac{2}{3}b_1 - \frac{1}{3}b_2\right)\right\}$.

Obs. Samma resonemang som i Ex. 6 visar mer allmänt att om $Ax = b$ är ett linjärt ekvationssystem med inverterbar koefficientmatris A (vilket innebär att antalet ekvationer = antalet obekanta), då är $x = A^{-1}b$ systemets enda lösning.

Standardmetoden avgör om inverterbarheten och alstrar inversen enligt en algoritm som transformerar matriser. För 2×2-matriser finns det följande alternativ som avgör om inverterbarheten och alstrar inversen i en formel.

Sats. Låt $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Om $ad - bc = 0$, då är A inte inverterbar.
Om $ad - bc \neq 0$, då är A inverterbar och $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.

Denna såkallade determinantmetod ska vi generalisera från 2×2-matriser till allmänna $n\times n$-matriser i F6.

Ex. 7 (jfr. Ex. 4) För $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ är $ad - bc = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3$. Alltså är A inverterbar, och

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ex. 8 (jfr. Ex. 5) För $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ är $ad - bc = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0$. Alltså är A inte inverterbar.

Räkneregler för inverterbara matriser.

Låt $A, B, A_1, \dots, A_\ell$ vara inverterbara matriser av samma storlek. Då gäller:

(i) A^{-1} är inverterbar, och $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) A^T är inverterbar, och $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(iii) AB är inverterbar, och $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Varning: $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.

(iv) $A_1 A_2 \cdot \dots \cdot A_\ell$ är inverterbar, och $(A_1 A_2 \dots A_\ell)^{-1} = A_\ell^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

Ex. 9 (jfr. (ii)) För $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ är $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ och $(A^T)^{-1} \underset{\text{Sats}}{=} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\|$$

samt $A^{-1} \underset{\text{Sats}}{=} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ och $(A^{-1})^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Bakom standardmetoden gömmer sig ett intressant samband mellan matristransformation och matrisinvers, vilket vi nu ska belysa lite närmare.

<u>Elementärmatriser</u>. Varje matris som framgår av enhetsmatrisen $I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ genom **en** elementär radtransformation kallas <u>elementärmatris</u> (= em).

<u>Ex. 10</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{em}$$

$$3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{em}$$

$$(4)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{em}$$

<u>Anm 1</u> $\left.\begin{array}{l} \underline{\text{Om}}\ A \sim B \ \underline{\text{med en elementär radtransformation}} \\ \underline{\text{och}}\ I \sim E \ \underline{\text{med samma elementära radtransformation}} \end{array}\right\}$ <u>då är</u> $EA = B$.

<u>M.a.o.:</u> Varje elementär radtransformation av en given matris A kan åstadkommas genom vänstermultiplikation med en lämplig elementärmatris: $A \sim B = EA$, där $I \sim E$.

<u>Ex. 11</u> a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$(4)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(4)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$