F5 Räkning med inverterbara matriser

Till varje elementär radtransformation på en matris finns det en invers elementär radtransformation, som återställer matrisen.

Ex. 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \tfrac{1}{c} \cdot \begin{pmatrix} c & 2c \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim -a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a+3 & 2a+4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Anm. 2 Varje elementärmatris E framgår av I genom en elementär radtransformation. E är inverterbar, och E^{-1} är den elementärmatris som framgår av I genom den tillhörande inversa radtransformationen.

M.a.o.: Varje elementärmatris E är inverterbar, och E^{-1} är igen en elementärmatris. E och E^{-1} framgår av I genom ömsesidigt inversa elementära radtransformationer.

Ex. 2

a) Om $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} = E$, då är

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} = E^{-1}.$$

b) Om $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix} = E$, då är

$$\tfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & \tfrac{1}{3} \end{pmatrix} = E^{-1}.$$

c) Om $4 \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = E$, då är

$$-4 \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = E^{-1}.$$

Ex. 3 Skriv $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ som produkt av elementärmatriser.

Lösning.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$ \qquad\qquad \underset{E_1A}{\shortparallel} \qquad\qquad \underset{E_2E_1A}{\shortparallel} \qquad\qquad \underset{E_3E_2E_1A}{\shortparallel} \quad \text{för}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & -3 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{4} & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Med $E = E_3E_2E_1$ är då $EA = I$. Alltså är

$$A = IA = E^{-1}EA = E^{-1}I = E^{-1} = (E_3E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}.$$

Svar. $A = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 3 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, exvis.

Varför fungerar standardmetoden?

Sats. Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ och $(A \mid I) \sim (I \mid B)$. Då är A inverterbar, och $A^{-1} = B$.

Bevis. Antagandet innebär att det finns en följd av elementära radtransformationer (säg ℓ stycken) som så småningom transformerar $(A \mid I)$ till $(I \mid B)$. Alltså finns det en motsvarande följd av elementärmatriser $E_1, \dots, E_\ell$ så att

$$(A \mid I) \sim (E_1A \mid E_1I) \sim (E_2E_1A \mid E_2E_1I) \sim \dots \sim (E_\ell \cdots E_2E_1A \mid E_\ell \cdots E_2E_1I) = (I \mid B).$$

Med $E = E_\ell \cdots E_1$ gäller alltså $(EA \mid EI) = (I \mid B)$.

Som produkt av elementärmatriser (vilka ju alla är inverterbara) är E inverterbar. Alltså är

$$A = IA = E^{-1}EA = E^{-1}I = E^{-1} \quad \text{inverterbar, och}$$

$$A^{-1} = IA^{-1} = EAA^{-1} = EI = B. \qquad \square$$

Vi fyller på med lite blandat stoff kring inverterbarhet.

För återstoden av denna föreläsning är $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Enligt inversens definition är $B = A^{-1}$ om och endast om

$$AB = I \quad \text{och} \quad BA = I.$$

Det räcker dock att B löser en av dessa två ekvationer, enligt följande

Sats. Om $AB = I$, då är $B = A^{-1}$. I synnerhet gäller $BA = I$.
Om $BA = I$, då är $B = A^{-1}$. I synnerhet gäller $AB = I$.

Bevis. Se kursbok, sidan 62.

Konsekvenser. 1. I allmänhet är ju $AB \neq BA$. För $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ exvis blir

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Om däremot $AB = I$, då medför satsen att $AB = BA$.

2. Om AB är inverterbar, då är både A och B inverterbara.

Bevis. $A\left(B\,(AB)^{-1}\right) = I \underset{\text{Sats}}{\Rightarrow} B(AB)^{-1} = A^{-1}$

$$\left((AB)^{-1}A\right)B = I \underset{\text{Sats}}{\Rightarrow} (AB)^{-1}A = B^{-1} \qquad \square$$

3. Givet $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. För att kolla om $B = A^{-1}$ räcker det att verifiera en av ekvationerna

$$AB = I \quad \text{och} \quad BA = I.$$

Här följer några exempel.

a) Determinantmetoden hävdar att om $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ har $\det(A) = ad - bc \neq 0$, då är $B = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1}$. Varför är det så? Som bevis räcker det att verifiera att $BA = I$.

Verifikation. $BA = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} da-bc & db-bd \\ -ca+ac & -cb+ad \end{pmatrix} \overset{!}{=} I \qquad \square$

b) 1.4.55 Antag att $A^3 = 0$. Visa att $(I-A)^{-1} = I + A + A^2$.

Bevis. Det räcker att verifiera att $(I-A)(I+A+A^2) = I$.

Verifikation.
$$\begin{aligned}(I-A)(I+A+A^2) &= I(I+A+A^2) - A(I+A+A^2)\\ &= I + A + A^2 - (A + A^2 + A^3)\\ &= I - A^3 = I - 0 = I \qquad \square\end{aligned}$$

P.s.s. inses att om $A^l = 0$, då är $(I-A)^{-1} = I + A + \ldots + A^{l-1}$.

c) För $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$ är $A^2 = \begin{pmatrix} & 0 & 1 \\ & & 0 \\ & & \end{pmatrix}$ och $A^3 = 0$. Alltså är

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (I - A)^{-1} = I + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Diagonalmatris</u> kallas varje kvadratisk matris D vars samtliga element utanför diagonalen är 0.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

Diagonalmatriser är synnerligen enkla att multiplicera

<u>Ex. 4</u> $\begin{pmatrix} 2 & \\ & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & \\ & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4 & \\ & 3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & \\ & 15 \end{pmatrix}$

<u>Allmänt</u>: $DE = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & & & \\ & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 e_1 & & & \\ & d_2 e_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n e_n \end{pmatrix}$.

Om alla $d_i \neq 0$, då blir i synnerhet

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^{-1} & & & \\ & d_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = I,$$

och därmed är

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} d_1^{-1} & & & \\ & d_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Om däremot något $d_i = 0$, då är D inte inverterbar. (Varför inte?)

Några av diagonalmatrisernas trevliga egenskaper gäller mer generellt även för

nedre triangulära matriser $\begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ respektive övre triangulära matriser $\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}$,

i följande bemärkelse.

Sats. Produkten av två $\left\{\begin{matrix}\text{övre}\\ \text{nedre}\end{matrix}\right.$ triangulära matriser är $\left\{\begin{matrix}\text{övre}\\ \text{nedre}\end{matrix}\right.$ triangulär.

En $\left\{\begin{matrix}\text{övre}\\ \text{nedre}\end{matrix}\right.$ triangulär matris är inverterbar omm alla dess diagonalelement är nollskilda.

I så fall är inversen igen $\left\{\begin{matrix}\text{övre}\\ \text{nedre}\end{matrix}\right.$ triangulär.

Ex. 5 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ & 2 & 5 \\ & & 3 \end{pmatrix}$ är inverterbar;

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ & 0 & 5 \\ & & 3 \end{pmatrix}$ är inte inverterbar.