F6

Determinanter

Problem. Givet $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, avgör om A är inverterbar. Om så är fallet, ange A^{-1}.

Som lösning på detta problem har vi lärt oss

Standardmetoden. Använd Gaussalgoritmen på $(A|I)$ så att $(A|I) \sim (T|B)$, där T är A:s trappstegsmatris.

Om $T \neq I$, då är A inte inverterbar.

Om $T = I$, då är A inverterbar och $A^{-1} = B$.

Som alternativ lösning ska vi i denna föreläsning lära oss

Determinantmetoden. Matrisen A tillordnas ett tal $\det(A)$, kallat determinanten av A.

Om $\det(A) = 0$, då är A inte inverterbar.

Om $\det(A) \neq 0$, då är A inverterbar och $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)}$.

Matrisen $\operatorname{adj}(A)$ kallas adjungatan till A, och dess element har formen $\pm$ någon underdeterminant av A.

Vi känner redan determinantmetoden i

Fall $n = 2$. Matrisen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tillordnas talet $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Om $ad - bc = 0$, då är A inte inverterbar.

Om $ad - bc \neq 0$, då är A inverterbar och $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \underbrace{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}_{\operatorname{adj}(A)}$.

Ex. 1 (= 1.4.9) För matrisen $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) \\ \frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) \end{pmatrix}$ är

$$\det(A) = \frac{1}{4}\left(e^x+e^{-x}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(e^x-e^{-x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2x}+2+e^{-2x}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

Alltså är A inverterbar, och

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) & -\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) \\ -\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) \end{pmatrix}$$

Hur är talet $\det(A)$ och matrisen $\mathrm{adj}(A)$ definierade för $n \geq 3$?

Vi trevar oss fram till svaret genom att först titta på

Fall $n = 3$. Låt $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Minoren (= "den mindre determinanten") M_{ij} är determinanten av den 2×2-matris som erhålls av A genom att stryka rad i och kolonn j. Det finns 9 minorer av A, nämligen

$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 32-35 = -3$, $M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 24-30 = -6$, $M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 21-24 = -3$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8-14 = -6$, $M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -8-12 = -20$, $M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -7-6 = -13$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5-8 = -3$, $M_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -5-6 = -11$, $M_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4-3 = -7$

Minorernas matris blir då

$$M = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -3 \\ -6 & -20 & -13 \\ -3 & -11 & -7 \end{pmatrix}.$$

<u>Kofaktorn</u> (= "den andra faktorn") C_{ij} definieras enligt

$$\boxed{C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = \begin{cases} M_{ij} & \text{om } i+j \text{ är jämnt} \\ -M_{ij} & \text{om } i+j \text{ är udda} \end{cases}}$$

<u>Kofaktormatrisen</u> blir då

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -20 & 13 \\ -3 & 11 & -7 \end{pmatrix}.$$

<u>Adjungatan</u> (= "den tillhörande matrisen") är kofaktormatrisens transponata, alltså

$$\operatorname{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -20 & 11 \\ -3 & 13 & -7 \end{pmatrix}.$$

<u>Determinanten</u> av A definieras enligt

$$\boxed{\det(A) = A_{11}C_{11} + A_{12}C_{12} + A_{13}C_{13}}$$ Kofaktorutveckling längs första raden

$$= -1\cdot(-3) + 1\cdot 6 + 2\cdot(-3)$$

$$= 3 + 6 - 6 = 3$$

Då $\det(A) \neq 0$ är A inverterbar, och

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -20 & 11 \\ -3 & 13 & -7 \end{pmatrix}$$

Obs att $\det(A)$ kan lika väl beräknas genom kofaktorutveckling längs andra eller tredje raden, eller även genom kofaktorutveckling längs någon kolonn!

Verifikation.

rad 2 : $3\cdot 6 + 4\cdot(-20) + 5\cdot 13 = 18 - 80 + 65 = 18 - 15 = 3 \overset{!}{=} \det(A)$

rad 3 : $6\cdot(-3) + 7\cdot 11 + 8\cdot(-7) = -18 + 77 - 56 = -18 + 21 = 3$

kolonn 1 : $-1\cdot(-3) + 3\cdot 6 + 6\cdot(-3) = 3 + 18 - 18 = 3 + 0 = 3$

kolonn 2 : $1\cdot 6 + 4\cdot(-20) + 7\cdot 11 = 6 - 80 + 77 = 6 - 3 = 3$

kolonn 3 : $2\cdot(-3) + 5\cdot 13 + 8\cdot(-7) = -6 + 65 - 56 = -6 + 9 = 3$

Kofaktorutvecklingen beror alltså inte på valet av rad eller kolonn :

$$\det(A) = A_{i1}C_{i1} + A_{i2}C_{i2} + A_{i3}C_{i3} \qquad \forall\, i \in \underline{3} = \{1,2,3\}$$

för alla

$$= A_{1j}C_{1j} + A_{2j}C_{2j} + A_{3j}C_{3j} \qquad \forall\, j \in \underline{3}$$

Detta utnyttjar man förstås i determinantberäkningen.

Ex. 2 Beräkna $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Lösning. Utveckling längs andra kolonnen ger

$$\det(A) = 0\cdot C_{12} + 2\cdot C_{22} + 0\cdot C_{32} = 2\,C_{22} = 2\,M_{22}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 2(7-18) = 2\cdot(-11) = -22 .$$

Sammanfattning och generalisering. Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, där $n \geq 2$.

(1) Minoren M_{ij} är determinanten av den $(n-1) \times (n-1)$-matris som erhålls av A genom att stryka rad i och kolonn j. Minorerna bildar minorernas matris

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix}.$$

(2) Kofaktorn C_{ij} är talet $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = \begin{cases} M_{ij} & \text{om } i+j \text{ är jämnt} \\ -M_{ij} & \text{om } i+j \text{ är udda} \end{cases}$.

Kofaktorerna bildar kofaktormatrisen

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} & \cdots \\ -M_{21} & M_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Obs. schackbrädesmönstret i teckenfördelningen av $C_{ij} = \pm M_{ij}$:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

(3) Talet
$$\begin{aligned} \det(A) &= A_{i1} C_{i1} + \ldots + A_{in} C_{in} \\ &= A_{1j} C_{1j} + \ldots + A_{nj} C_{nj} \end{aligned}$$

beror inte på valet av rad i eller kolonn j, och kallas för determinanten av A.

(4) Kofaktormatrisens transponata är adjungatan

$$\operatorname{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}.$$

(5) A är inverterbar omm $\det(A) \neq 0$. I så fall är $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)}$.

I denna formel för A^{-1} ingår en $n \times n$-determinant (nämligen $\det(A)$) och n^2 stycken $(n-1)\times(n-1)$-determinanter (nämligen minorerna M_{ij}). Hur beräknar man då determinanter enklast? Det finns 12 determinantregler (DR1)–(DR12) som hjälper i detta avseende.

(DR1) Om en skalär multipel av en rad (kolonn) adderas till en annan rad (kolonn), då ändras determinanten inte.

Ex. 3 Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Beräkna $\det(A)$ samt $(A^{-1})_{34}$.

Lösning. a)
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 9 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1.$$

b)
$$A^{-1} = \frac{1}{1}\operatorname{adj}(A) \Rightarrow (A^{-1})_{34} = (\operatorname{adj}(A))_{34} = (C^T)_{34} = C_{43} = -M_{43} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8.$$

Resonemanget i exemplets andra del håller i stor allmänhet, och alstrar då följande

<u>Formel.</u> <u>Om $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är inverterbar, då gäller för alla platser ij att</u>

$$\boxed{(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det(A)} (-1)^{i+j} M_{ji}}$$

<u>Bevis.</u> $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)} C^T$ medför att

$$(A^{-1})_{ij} = \left(\frac{1}{\det(A)} C^T\right)_{ij} = \frac{1}{\det(A)} (C^T)_{ij} = \frac{1}{\det(A)} C_{ji}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} (-1)^{j+i} M_{ji} = \frac{1}{\det(A)} (-1)^{i+j} M_{ji} \quad . \qquad \square$$