F7

Determinantregler (DR)

I denna föreläsning går vi igenom 12 så kallade determinantregler, dvs. räkneregler för determinant-räkning. Determinanter är definierade endast för kvadratiska matriser. Därför antas idag alla matriser vara kvadratiska. Till att börja med frågar vi oss hur de elementära radtransformationerna påverkar determinanten. Svaret ges av (DR1) − (DR3).

Ex.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 14 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-6 = -2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 19 \end{vmatrix} = 19-21 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 14 \end{vmatrix} = 14-16 = -2$$

(DR1) Addition av en skalär multipel av en rad (kolonn) till en annan rad (kolonn) påverkar determinanten inte.

Obs. att (DR1) tillsammans med kofaktorutvecklingen räcker redan för att effektivt beräkna determinanten av en konkret given matris!

Ex. 2.2.11.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-6-(-1)) = 5.$$

Ex.

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20-30 = -10$$

(DR2) Multiplikation av en rad (kolonn) med en skalär c gör att determinanten multipliceras med c.

M.a.o. En gemensam faktor kan brytas ut från varje enskild rad (kolonn), när det gäller determinanter.

Ex. Visa att $A = \begin{pmatrix} b-a & (b-a)b \\ c-a & (c-a)c \end{pmatrix}$ är inverterbar omm a, b, c är tre olika tal.

Lösning. $\det(A) = \begin{vmatrix} b-a & (b-a)b \\ c-a & (c-a)c \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} 1 & b \\ c-a & (c-a)c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c-a)(c-b).$

Slutsats. A är inverterbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow (b-a)(c-a)(c-b) \neq 0$

$\Leftrightarrow a, b, c$ är olika.

Ex. Visa att om $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ och $k \in \mathbb{R}$, då är $\det(kA) = k^2 \det(A)$.

Bevis. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow kA = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det(kA) = \begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = kk\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = k^2\det(A).$ □

P.s.s. inses att om $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ och $k \in \mathbb{R}$, då är $\boxed{\det(kA) = k^n \det(A)}$.

Ex. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

(DR 3) Omkastning av två rader (kolonner) gör att determinanten byter tecken.

Ex. $\begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ a & d_2 & 0 \\ c & b & d_3 \end{vmatrix} = d_1 \begin{vmatrix} d_2 & 0 \\ b & d_3 \end{vmatrix} = d_1 d_2 d_3$. Detta exempel generaliseras till

(DR 4) Om A är (övre eller nedre) triangulär, då är $\det(A) = A_{11} A_{22} \cdots A_{nn}$.

Speciellt gäller för alla diagonalmatriser att $\det\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n$.

I synnerhet är $\det(I) = 1$.

Ex. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 4 & 5 \\ & & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot 6 = 24$

Ex. $\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 1$

Ex. För $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ är $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, alltså

$$\det(A^T) = ad - cb = ad - bc = \det(A).$$ Mer allmänt gäller

(DR5) $\boxed{\det(A) = \det(A^T)}$

Konsekvens. Varje radvis determinantregel gäller även kolonnvis, och tvärtom.

(DR6) Om A har en nollrad eller en nollkolonn, då är $\det(A) = 0$.

Bevis. Utveckla $\det(A)$ längs denna nollrad eller nollkolonn.

Två rader i en matris kallas proportionella om

en rad $=$ c$\cdot$(andra raden) för något $c \in \mathbb{R}$.

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$. Här är första och andra raden proportionella. Detta innebär att

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} \overset{(-2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(DR7) Om A har två proportionella rader (kolonner), då är $\det(A) = 0$.

Varning. $\quad |A+B| \neq |A| + |B|$

Ex. $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, medan

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 0 = 1$$

Determinanten respekterar alltså inte addition av matriser. Dock gäller

(DR8) Determinanten respekterar addition m.a.p. rad i (kolonn j), då alla övriga raderna (kolonnerna) är fixa.

$$\begin{vmatrix} & A_1 & \\ \hline r_1+s_1 & \dots & r_n+s_n \\ \hline & A_2 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & A_1 & \\ \hline r_1 & \dots & r_n \\ \hline & A_2 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & A_1 & \\ \hline s_1 & \dots & s_n \\ \hline & A_2 & \end{vmatrix}$$

Ex. 2.1.35. Vilket samband råder mellan $d_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & 1 & f \\ g & 0 & 1 \end{vmatrix}$ och $d_2 = \begin{vmatrix} a+\lambda & b & c \\ d & 1 & f \\ g & 0 & 1 \end{vmatrix}$?

Lösning. $\quad d_2 = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a+\lambda \\ d+0 \\ g+0 \end{matrix}} & \begin{matrix} b \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} c \\ f \\ 1 \end{matrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & 1 & f \\ g & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & b & c \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = d_1 + \lambda$

Ex. 2.2.33. $\quad \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{0} + \begin{vmatrix} a_1 & -b_1 & c_1 \\ a_2 & -b_2 & c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & -b_1 & c_1 \\ b_2 & -b_2 & c_2 \\ b_3 & -b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{0}$$

$$= - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ex. a) Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Då är

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}, \text{ alltså}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |A||B|$$

b) Låt $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och B som ovan. Då är

$$AB = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ alltså}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |A||B|.$$

Allmänt gäller att determinanten respekterar multiplikation av matriser!

(DR 9) $\boxed{|AB| = |A||B|}$

Denna regel har följande konsekvenser.

(DR 10) $|A_1 A_2 \dots A_l| = |A_1||A_2| \dots |A_l|$.

Bevis för $l=3$. $|(A_1 A_2) A_3| = |A_1 A_2||A_3| = |A_1||A_2||A_3|$. □

(DR 11) Om A är inverterbar, då är $\boxed{|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}}$.

Bevis. $|A^{-1}||A| = |A^{-1}A| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$. □

Kom ihåg att vi definierade det(A) enligt kofaktorutveckling

$$\det(A) = A_{11}C_{11} + A_{12}C_{12} + \dots + A_{1n}C_{1n}$$

$$= A_{11}M_{11} - A_{12}M_{12} + \dots + (-1)^{1+n}A_{1n}M_{1n}$$

Detta är en <u>implicit</u> (= invecklad) formel för det(A) så länge minorerna M_{1j} inte är kända. Formeln blir dock <u>explicit</u> (= utvecklad), så snart minorerna är fullständigt utvecklade. Hur ser den explicita formeln för det(A) ut?

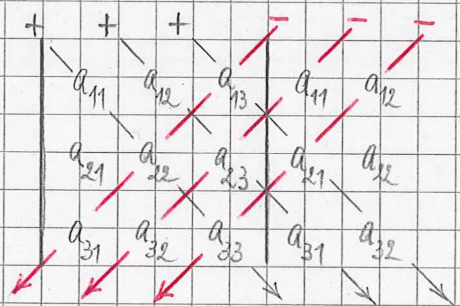
<u>Fall</u> $n=2$. $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

<u>Fall</u> $n=3$. $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

(DR 12) <u>Den explicita formeln för 3×3-determinanter går att minnas enligt Sarrus regel</u>:



<u>Ex. 2.1.12.</u> $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0 + (-5) + 42 - 0 - 35 - 6 = -4.$