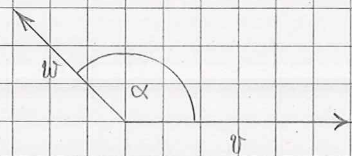
F9

Skalärprodukt

Med vinkeln mellan två nollskilda vektorer v och w menas den vinkel $\alpha = \measuredangle(v,w)$ som uppfyller

$$0 \le \alpha \le \pi .$$



Hur beräknar man vinkeln $\alpha = \measuredangle(v,w)$?

Med hjälp av skalärprodukten $v \bullet w$! Vad är det?

Skalärprodukten (= dot product) är ett tal (dvs. en skalär) som tillordnas två givna vektorer v och w enligt

$$\boxed{v \bullet w = \begin{cases} v_1 w_1 + v_2 w_2 & \text{om } v, w \text{ är vektorer i planet} \\ v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 & \text{om } v, w \text{ är vektorer i rymden} \end{cases}}$$

Ex. a) Skalärprodukten av $v = (1,2)$ och $w = (3,4)$ är talet

$$v \bullet w = (1,2) \bullet (3,4) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 \cdot 8 = 11$$

b) Skalarprodukten av $v = (1,2,3)$ och $w = (4,5,-2)$ är

$$v \bullet w = (1,2,3) \bullet (4,5,-2) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) = 4 + 10 - 6 = 8 .$$

Grunden till att vinkeln $\alpha = \measuredangle(v,w)$ kan beräknas m.h.a. skalärprodukten $v \bullet w$ ligger i

Skalärproduktformeln
$$\boxed{v \bullet w = \|v\| \, \|w\| \cos\alpha}$$

Vi ska först försöka smälta den genom att räkna några exempel, och sedan ska vi förklara varför den gäller.

Ex. Avgör om vinkeln $\alpha = \measuredangle(v, w)$ är spetsig, rät, eller trubbig.

a) $v = (6, 1, 4)$, $w = (2, 0, -3)$ $\Rightarrow$ $v \bullet w = 12 + 0 - 12 = 0$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{v \bullet w}{\|v\|\|w\|} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}, \text{ dvs. } \alpha \text{ är } \underline{\text{rät}}.$$

b) $v = (0, 0, -1)$, $w = (1, 1, 1)$ $\Rightarrow$ $v \bullet w = 0 + 0 - 1$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{v \bullet w}{\|v\|\|w\|} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0$$

$\Rightarrow$ α är trubbig. Närmare bestämt är $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$.

c) $v = (-6, 0, 4)$, $w = (3, 1, 6)$ $\Rightarrow$ $v \bullet w = -18 + 0 + 24 = 6$

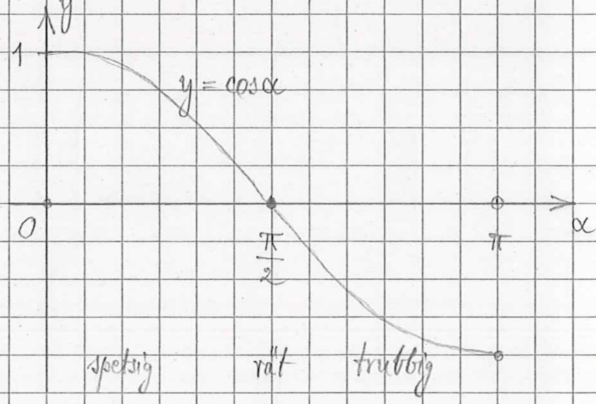
$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{v \bullet w}{\|v\|\|w\|} > 0 \Rightarrow \alpha \text{ är } \underline{\text{spetsig}}.$$

Vill man dessutom bestämma α:s värde, så beräknar man

$$\|v\| = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} \quad \text{och} \quad \|w\| = \sqrt{9 + 1 + 36} = \sqrt{46} \quad \text{och får}$$

$$\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{52}\sqrt{46}} = \frac{3}{\sqrt{26}\sqrt{23}} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{26}\sqrt{23}}\right).$$

Sammanfattning och generalisering.



Om $v \bullet w > 0$, då är $\cos\alpha = \frac{v \bullet w}{\|v\|\|w\|} > 0$,

alltså $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, dvs. α är spetsig.

Om $v \bullet w = 0$, då är $\cos\alpha = \frac{v \bullet w}{\|v\|\|w\|} = 0$,

alltså $\alpha = \frac{\pi}{2}$, dvs. α är rät.

Om $v \bullet w < 0$, då är $\cos\alpha = \frac{v \bullet w}{\|v\|\|w\|} < 0$

alltså $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$, dvs. α är trubbig.

Vinkelns cosinus beräknas p.g.a. skalärproduktformeln enligt $\boxed{\cos\alpha = \frac{v \cdot w}{\|v\| \, \|w\|}}$,

och själva vinkeln blir då $\boxed{\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{v \cdot w}{\|v\| \, \|w\|}\right)}$

För att få fram värdet på högerledet $\cos^{-1}\left(\frac{v \cdot w}{\|v\| \, \|w\|}\right)$ behövs i allmänhet en miniräknare.

Vissa speciella vinklar går dock att upptäcka direkt:

$\cos^{-1}\left(\frac{v \cdot w}{\|v\| \, \|w\|}\right) = \alpha$	30°	45°	60°	90°
$\frac{v \cdot w}{\|v\| \, \|w\|} = \cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$$\alpha \underset{\cos}{\overset{\cos^{-1}}{\rightleftarrows}} \cos\alpha$$

Även längden av en vektor v kan beräknas med hjälp av skalärprodukten, då

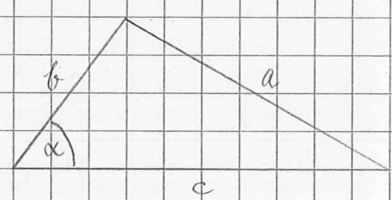
$$v \cdot v = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \|v\|^2$$

medför att

$$\boxed{\|v\| = \sqrt{v \cdot v}}$$

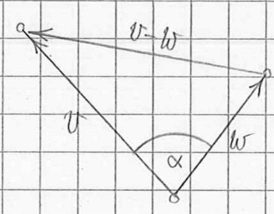
Varför gäller nu skalärproduktformeln $v \cdot w = \|v\| \, \|w\| \cos\alpha$?

Beviset bygger på kosinussatsen $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$



som gäller för varje triangel. Givet två vektorer v och w, så

tillämpar vi kosinussatsen på triangeln här intill och får



$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\| \, \|w\| \cos\alpha \qquad (1)$$

Å andra sidan är

$$\|v-w\|^2 = (v-w)\cdot(v-w) = v\cdot v - v\cdot w - w\cdot v + w\cdot w$$

$$= \|v\|^2 - 2v\cdot w + \|w\|^2 \qquad (2)$$

Enligt (2) och (1) blir då

$$v\cdot w \underset{(2)}{=} \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v-w\|^2\right) \underset{(1)}{=} \|v\|\|w\|\cos\alpha . \qquad \square$$

<u>Generalisering från planet $\mathbb{R}^2$ och rymden $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^n$</u>.

Skrivsättet $v \in \mathbb{R}^2$ betyder att $v = (v_1, v_2)$ är en <u>vektor i planet</u>.

Skrivsättet $v \in \mathbb{R}^3$ betyder att $v = (v_1, v_2, v_3)$ är en <u>vektor i rymden</u>.

Skrivsättet $v \in \mathbb{R}^4$ betyder att $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ är en <u>kvadrupel av reella tal</u>, <u>kallad vektor i $\mathbb{R}^4$</u>.

Skrivsättet $v \in \mathbb{R}^n$ betyder att $v = (v_1, \dots, v_n)$ är en n-<u>tipel av reella tal</u>, <u>kallad vektor i $\mathbb{R}^n$</u>.

Alla fyra räknesätten för vektorer i planet eller rymden generaliseras till vektorer i $\mathbb{R}^n$ på det mest uppenbara viset:

addition
subtraktion
multiplikation med skalärer

} sker komponentvis. Alla räkneregler som gäller i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ gäller även i $\mathbb{R}^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Skalärprodukten i $\mathbb{R}^n$ definieras enligt

$$v\cdot w = (v_1, \dots, v_n)\cdot(w_1, \dots, w_n) = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$$

och uppfyller följande lagar.

(1) $v \cdot w = w \cdot v$

(2) $(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

(3) $u \cdot (v+w) = u \cdot v + u \cdot w$

(4) $(cv) \cdot w = c(v \cdot w) = v \cdot (cw)$

(5) $v \cdot v > 0$ om $v \neq 0$

(6) $v \cdot v = 0$ om $v = 0$

Kommentar. (1)-(4) följer lätt ur definitionen av de räknesätten som ingår. Vi tillämpade (1)-(3) faktiskt i beviset av skalärproduktformeln.

(5) $v \cdot v = v_1^2 + \dots + v_n^2 > 0$ då alla $v_i^2 \geq 0$ och minst ett $v_i \neq 0$.

(6) $v = 0 := (0, \dots, 0)$ är nollvektorn i $\mathbb{R}^n$.

Längder och avstånd beräknas i $\mathbb{R}^n$ analogt med $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$.

Ex. Längden av vektorn $v = (-2, 3, 3, -1) \in \mathbb{R}^4$ är

$$\|v\| = \sqrt{4+9+9+1} = \sqrt{23}.$$

Ex. Avståndet mellan punkterna $P = (0, -2, -1, 1)$ och $Q = (-3, 2, 4, 4)$ i $\mathbb{R}^4$ är

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\| = \|(-3, 4, 5, 3)\| = \sqrt{9+16+25+9} = \sqrt{59}.$$

För att även generalisera vinkelbegreppet från planet och rymden till $\mathbb{R}^n$ använder man sig av

Cauchy-Schwarz olikhet $\boxed{|v \cdot w| \leq \|v\| \|w\|}$

som gäller för alla $v, w \in \mathbb{R}^n$.

Ex. För $v = (0,2,2,1)$ och $w = (1,1,1,1)$ blir

$$|v \cdot w| = |0+2+2+1| = |5| = 5 \quad , \text{ medan}$$

$$\|v\|\,\|w\| = \sqrt{0+4+4+1}\,\sqrt{1+1+1+1} = \sqrt{9}\,\sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6 .$$

CS olikhet kan skrivas ekvivalent på formen

$$-\|v\|\,\|w\| \leq v \cdot w \leq \|v\|\,\|w\|$$

Om $v \neq 0$ och $w \neq 0$ är den vidare ekvivalent med

$$-1 \leq \frac{v \cdot w}{\|v\|\,\|w\|} \leq 1$$

Alltså går det bra att definiera vinkeln $\alpha = \sphericalangle(v,w)$ så att

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{v \cdot w}{\|v\|\,\|w\|}} \quad , \text{ dvs. } \quad \boxed{\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{v \cdot w}{\|v\|\,\|w\|}\right)}$$

Formellt beräknas alltså vinkeln i $\mathbb{R}^n$ precis som i planet eller rymden. Dock behövs CS olikhet för att rättfärdiga dessa formler i $\mathbb{R}^n$.

Ex. Avgör om $\alpha = \sphericalangle(v,w)$ är spetsig, rät, eller trubbig, då $v = (0,-2,-1,1)$ och $w = (-3,2,4,4)$.

Lösning. $v \cdot w = 0\cdot(-3) + (-2)\cdot 2 + (-1)\cdot 4 + 1 \cdot 4 = -4-4+4 = -4 < 0$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{-4}{\|v\|\,\|w\|} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi \quad , \text{ dvs. } \alpha \text{ är trubbig.}$$