Ett axplock av kurser där linjär algebra kommer till användning

Mekanik

Kvantfysik

Elektromagnetism och elkraftteknik

Hållfasthetslära

Beräkningsvetenskap

Reglerteknik

mm

Överblick

Kapitel 4. Allmänna vektorrum. De generaliserar $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{m\times n}$, mm.

Grundbegrepp: delrum, baser och koordinater, dimension.

Samband mellan matriser och vektorrum: varje matris $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ bestämmer en linjär avbildning $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $F_A(x) = Ax$, mellan vektorrummen $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{R}^m$. Å andra sidan är i matrisen A flera vektorrum inbyggda, exvis nollrummet och kolonnrummet, vilka i sin tur hjälper att förstå den linjära avbildningen $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Kapitel 5. Egenvärden och egenvektorer. Här studeras kvadratiska matriser $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Är A diagonaliserbar, dvs finns det en inverterbar matris S så att $SAS^{-1} = D$ är en diagonalmatris? Av vilken typ är operatorn $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$? Spegling, rotation, projektion, annat?

Kapitel 6. Inre produktrum. Här idkas geometri i allmänna vektorrum. Så snart dessa är utrustade med en inre produkt, kan vi prata om längder, vinklar, ON-baser, mm.

Kapitel 7. Kvadratiska former. Ortogonala matriser $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ svarar mot linjära operatorer $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ som bevarar längder och vinklar. Dessa tillämpas på studiet av kvadratiska former

$$q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$$

samt andragradsytor $Y: \; q(x,y,z) = 1$.

Kapitel 8. Linjära avbildningar $f : V \to W$ mellan allmänna vektorrum V, W generaliserar linjära avbildningar $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $F_A(x) = Ax$.

F1 Reella vektorrum, delrum

Från Linjär algebra och geometri I vet vi att följande matematiska objekt kan adderas med varandra, och kan multipliceras med skalärer (dvs med reella tal).

Objekt	Hur de anges	Notation
Vektorer i planet	$\nearrow$ eller (v_1, v_2)	$v \in \mathbb{R}^2$
Vektorer i rymden	$\nearrow$ eller (v_1, v_2, v_3)	$v \in \mathbb{R}^3$
Vektorer i det n-dimensionella rummet	$(v_1, \dots, v_n)$	$v \in \mathbb{R}^n$
Matriser av storlek $m \times n$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Alla dessa har gemensamt att addition och multiplikation med skalärer uppfyller de följande lagarna.

addition

(1) $v + w = w + v$

(2) $(u + v) + w = u + (v + w)$

(3) Det finns ett s.k. nollobjekt 0 så att

$$v + 0 = v$$

(4) För varje v finns det ett s.k. negativt objekt $-v$ så att

$$v + (-v) = 0$$

multiplikation med skalärer

(5) $c(v + w) = cv + cw$

(6) $(c + d)v = cv + dv$

(7) $c(dv) = (cd)v$

(8) $1v = v$

Allmänt kallas en mängd V vars objekt kan adderas med varandra och multipliceras med reella skalärer för ett <u>reellt vektorrum</u> ifall lagarna (1) - (8) är uppfyllda. Elementen $v \in V$ kallas <u>vektorer</u>.

$V = \mathbb{R}^n$ och $V = \mathbb{R}^{m \times n}$ är alltså <u>de första exemplen på reella vektorrum</u> vi mött. Dessa utgör faktiskt redan <u>oändligt många exempel</u>, då man får ett specifikt vektorrum för varje värde på n respektive $m \times n$. Inom matematiken i sin helhet förekommer vektorrum som sandkorn vid havet. Här följer några exempel utöver $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{R}^{m \times n}$.

<u>Ex. 1</u> <u>Vektorrummet $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$</u> <u>av oändliga följder av reella tal</u>.

V består av alla följder $v = (v_1, v_2, \dots)$ av reella tal $v_i \in \mathbb{R}$. Addition och multiplikation med skalärer definieras <u>komponentvis</u>:

$$v + w = (v_1, v_2, \dots) + (w_1, w_2, \dots) := (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots)$$

$$cv = c(v_1, v_2, \dots) := (cv_1, cv_2, \dots)$$

Lagarna (1) - (8) är uppfyllda, då de komponentvis är uppfyllda. Därmed är $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ett vektorrum.

<u>Ex. 2</u> <u>Vektorrummet $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$</u> <u>av reellvärda funktioner av en reell variabel</u>.

V består av alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Addition och multiplikation med skalärer definieras <u>värdevis</u>:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(cf)(x) := c f(x)$$

Lagarna (1) - (8) är uppfyllda, då de värdevis är uppfyllda. Därmed är $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ett vektorrum.

Ex. 3 Den ettelementiga mängden $V = \{0\}$, med $0 + 0 = 0$ och $c0 = 0$, uppfyller (1)-(8) och är därmed ett vektorrum.

Ex. 4 Den tomma mängden $V = \emptyset$ är inte något vektorrum, då (3) inte är uppfylld.

Vi börjar nu med att utveckla grundläggande teori för allmänna vektorrum. De resultat vi kommer fram till gäller då för alla vektorrum på en gång! I enlighet med detta utgår vi nu från ett allmänt vektorrum V, ej specificerat vilket, och alla resonemang bygger endast på lagarna (1)-(8). Den som tycker att det är för abstrakt och önskar föreställa sig något konkret, rekommenderas att tänka på $V = \mathbb{R}^2$ i den geometriska bemärkelsen av vektorer som anges av pilar.

Sats. I varje vektorrum V gäller:

(i) $0v = 0$

(ii) $c0 = 0$

(iii) $(-1)v = -v$

(iv) $cv = 0 \Rightarrow c = 0$ eller $v = 0$

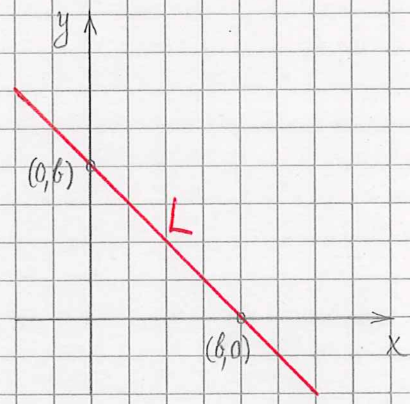
Bevis. För (i) och (iii) se kursbok, sidan 177.

(ii)
$$cO = c(0+0) = c0 + c0$$
$$\Rightarrow \quad c0 - c0 = (c0 + c0) - c0 = c0 + (c0 - c0) = c0 + 0$$
$$\Rightarrow \quad 0 = c0$$

(iv) Låt $cv = 0$ och $c \neq 0$. Då är

$$v = 1v = \left(\frac{1}{c}c\right)v = \frac{1}{c}(cv) = \frac{1}{c}0 \underset{\text{(ii)}}{=} 0 . \qquad \square$$

Ex. 5 Linjen $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = b\}$ är en delmängd i planet $\mathbb{R}^2$, och $\mathbb{R}^2$ är ett vektorrum (med komponentvis definierade räknesätten). Är då även L ett vektorrum (med komponentvis definierade räknesätten)?



Lösning. Antag att $b \neq 0$. Då är $(b,0) \in L$ och $(0,b) \in L$, medan

$$(b,0) + (0,b) = (b,b) \notin L, \quad \text{då} \quad b+b \neq b.$$

Delmängden $L \subset \mathbb{R}^2$ är alltså inte sluten under addition (och faktiskt inte heller sluten under multiplikation med skalärer), och därmed är L inte något vektorrum.

Antag att $b = 0$. Då är L sluten under addition och multiplikation med skalärer:

$$(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in L \Rightarrow (x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2) \in L, \quad \text{då}$$

$$(x_1+x_2) + (y_1+y_2) = (x_1+y_1) + (x_2+y_2) = 0 + 0 = 0$$

$$c \in \mathbb{R},\ (x,y) \in L \Rightarrow c(x,y) = (cx, cy) \in L, \quad \text{då}$$

$$cx + cy = c(x+y) = c0 = 0.$$

Dessutom går L genom origo: $0 = (0,0) \in L$, då $0+0=0$. Nu kan vi enkelt verifiera giltigheten av lagarna (1) – (8) i L: (1) – (2) och (5) – (8) gäller i L, då de gäller i $\mathbb{R}^2$.

(3) Origo $0 \in L$ är nollobjekt i L, då 0 är nollobjekt i $\mathbb{R}^2$.

(4) För varje $v \in L$ är $-v \underset{\text{Sats}}{=} (-1)v \in L$, då L är sluten under multiplikation med skalärer.

Svar. Linjen $L: x+y = b$ är ett vektorrum omm $b = 0$.

Resonemanget i Ex. 5 tillåter följande generalisering.

Låt V vara ett vektorrum, och $U \subset V$ en delmängd så att

(DR1) $\quad 0 \in U$

(DR2) $\quad x \in U,\ y \in U \Rightarrow x + y \in U$

(DR3) $\quad c \in \mathbb{R},\ x \in U \Rightarrow cx \in U$

Då är U självt ett vektorrum, vars två räknesätt är ärvda från V. Vektorrummet U kallas delrum till V.

Delrum $U \subset V$ är "snälla vektorrum" i den bemärkelsen att endast de tre villkoren (DR1) - (DR3) behöver verifieras istället för de åtta lagarna (1) - (8), för att avgöra om U faktiskt är ett vektorrum. Här följer några exempel på delrum.

Ex. 6 $\quad$ Lösningsmängden L till ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

är ett delrum $L \subset \mathbb{R}^n$ omm systemet är homogent (dvs. omm alla $b_i = 0$).

Obs. att Ex. 5 återfås som specialfallet $m = 1$, $n = 2$, $a_{11} = 1 = a_{12}$.

Bevis. Ekvationssystemet kan koncist skrivas som matrisekvation $Ax = b$, där

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Därmed är $L = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \}$.

Om $b \neq 0$, då är $A0 = 0 \neq b$, alltså $0 \notin L$.
Alltså är (DR1) ej uppfyllt, och därmed är $L \subset \mathbb{R}^n$ inte något delrum.

Om $b = 0$, då gäller (DR1)–(DR3):

(DR1) $A0 = 0 = b \Rightarrow 0 \in L$.

(DR2) $x \in L$ och $y \in L \Rightarrow Ax = 0$ och $Ay = 0$

$$\Rightarrow A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow x + y \in L.$$

(DR3) $c \in \mathbb{R}$, $x \in L \Rightarrow A(cx) = c(Ax) = c0 = 0$

$$\Rightarrow cx \in L. \qquad \square$$

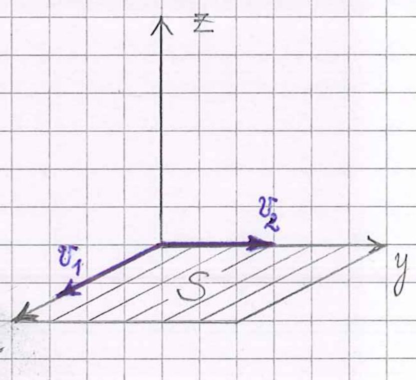
<u>Ex. 7</u> <u>Låt</u> $V = \mathbb{R}^3$ <u>och</u> $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$. <u>Tolka delmängden</u>
$S = \{ c_1 v_1 + c_2 v_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$ <u>i</u> $\mathbb{R}^3$ <u>geometriskt.</u>

<u>Lösning.</u>

$$\begin{aligned} c_1 v_1 + c_2 v_2 &= c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) \\ &= (c_1, 0, 0) + (0, c_2, 0) \\ &= (c_1, c_2, 0) \end{aligned}$$

medför att

$$\begin{aligned} S &= \{ (c_1, c_2, 0) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \} \\ &= \underbrace{\{ (x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R} \}}_{xy\text{-planet}} \subset \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\subset\ xyz\text{-rymden}} \end{aligned}$$



<u>Svar.</u> S <u>består av alla vektorer som ligger i xy-planet</u>, <u>inbäddat i xyz-rymden</u>.

Obs. att S "späns upp" av vektorerna v_1 och v_2! (Se figur.)
Därför kallas S även "spannet" av v_1 och v_2.

Notation. $S = \mathrm{span}\{v_1, v_2\} := \{c_1 v_1 + c_2 v_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$

Allmänt menas med spannet av en given uppsättning vektorer $v_1, \ldots, v_\ell$ i ett vektorrum V delmängden

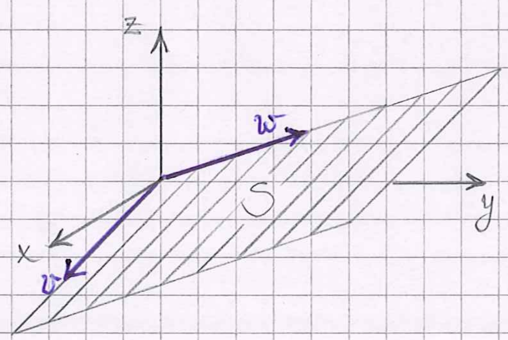
$$\mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_\ell\} := \{c_1 v_1 + \ldots + c_\ell v_\ell \mid c_1, \ldots, c_\ell \in \mathbb{R}\} \subset V.$$

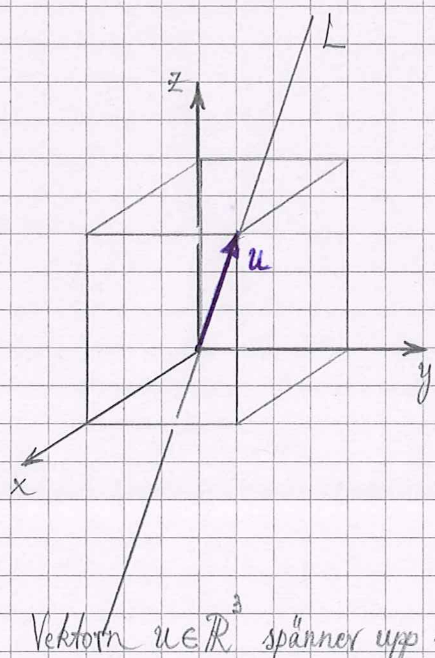
Varje element $c_1 v_1 + \ldots + c_\ell v_\ell$ i spannet kallas för en linjärkombination av $v_1, \ldots, v_\ell$.

Sats. $\mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_\ell\} \subset V$ är alltid ett delrum.

Bevis. Verifiera (DR1) – (DR3). Rutinövning!

Illustration.





Vektorerna $v, w \in \mathbb{R}^3$ spänner upp planet
$S = \mathrm{span}\{v, w\}$.
Detta går genom origo och är ett delrum i $\mathbb{R}^3$.

Vektorn $u \in \mathbb{R}^3$ spänner upp linjen
$L = \mathrm{span}\{u\}$.
Denna går genom origo och är ett delrum i $\mathbb{R}^3$.