F10

Cauchy-Schwarz olikhet

Kom ihåg att ett inre produktrum $V = (V, \langle\,\rangle)$ består av ett reellt vektorrum V, tillsammans med en inre produkt $V \times V \to \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle$. Den inre produkten möjliggör att utöva geometri i vektorrummet. I dagens föreläsning ska vi lägga grunden till denna geometri genom att introducera begreppen längd, avstånd, vinkel, ortogonalitet, samtidigt som vi studerar deras viktigaste egenskaper.

För hela denna föreläsning är V ett givet inre produktrum. Längden av en vektor $v \in V$ definieras enligt

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle},$$

och avståndet mellan två vektorer $v, w \in V$ definieras enligt

$$d(v, w) := \|v - w\| = \sqrt{\langle v - w, v - w\rangle}$$

Ex. 1 Polynomen $2 = 2 \cdot 1$ och X är vektorer i det inre produktrummet $\mathcal{P}$, med

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx$$

Beräkna $\|X\|$ samt $d(2, X)$.

Lösning. (a) $\|X\|^2 = \langle X, X\rangle = \int_0^1 X(x)\,X(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \quad \|X\| = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(b) $$d(2,X)^2 = \|2-X\|^2 = \langle 2-X, 2-X\rangle = \int_0^1 (2-x)^2\,dx = -\tfrac{1}{3}(2-x)^3\Big|_0^1 =$$

$$= -\tfrac{1}{3} - \left(-\tfrac{1}{3}\,8\right) = \tfrac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \quad d(2,X) = \sqrt{\tfrac{7}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

<u>Sats 1.</u> <u>I varje inre produktrum</u> V <u>har längd och avstånd följande egenskaper</u>.

(i) $\|v\| \geq 0$, <u>med likhet omm</u> $v = 0$, $d(v,w) \geq 0$, <u>med likhet omm</u> $v = w$

(ii) $\|cv\| = |c|\,\|v\|$, $d(v,w) = d(w,v)$

(iii) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$, $d(v,w) \leq d(v,x) + d(x,w)$

<u>Bevis.</u> (i) $$\|v\| = \sqrt{\underbrace{\langle v,v\rangle}_{\geq 0 \text{ pga (IP4)}}} \geq 0$$

$$\|v\| = 0 \Leftrightarrow \langle v,v\rangle = 0 \underset{(IP4)}{\Leftrightarrow} v = 0$$

Påståendet om d framgår omedelbart av påståendet om $\|\;\|$.

(ii) $$\|cv\| = \sqrt{\langle cv, cv\rangle} \underset{(IP3)}{=} \sqrt{c\langle v, cv\rangle} \underset{(IP1)}{=} \sqrt{c\langle cv, v\rangle} \underset{(IP3)}{=} \sqrt{c^2\langle v,v\rangle} = \sqrt{c^2}\,\sqrt{\langle v,v\rangle}$$

$$= |c|\,\|v\|$$

$$d(v,w) = \|v-w\| = \|-(v-w)\| = \|w-v\| = d(w,v)$$

(iii) Detta bevis är inte alls så uppenbart som beviset till (i) och (ii). Det kräver faktiskt

Cauchy-Schwarz olikhet. I varje inre produktrum V gäller

$$\boxed{|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|} \qquad \forall v, w \in V$$

Med CS-olikhet kan vi nu bevisa triangelolikheterna (iii) för längd och avstånd.

Bevis till (iii). $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle$

$$\begin{aligned} &= \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle \\ &= \|v\|^2 + 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2 \\ &\underset{CS}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

$$\begin{aligned} d(v,w) &= \|v-w\| = \|(v-x)+(x-w)\| \\ &\leq \|v-x\| + \|x-w\| = d(v,x) + d(x,w) \end{aligned}$$ □

CS-olikheten har många ansikten. Den ligger till grund inte bara för triangelolikheterna, utan också för vinkelbegreppet i allmänna inre produktrum. Eller, för att variera ämnet med en övning, så kan den te sig så här.

Ex. 2 Är det sant att alla kontinuerliga funktioner $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ uppfyller olikheten

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \leq \int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 g^2(x)\,dx \quad ?$$

Lösning. f, g är vektorer i det inre produktrummet $C[0,1]$, med $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$.
Alltså är

$$\left(\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 = \langle f,g\rangle^2 = |\langle f,g\rangle|^2 \underset{CS}{\leq} (\|f\|\,\|g\|)^2 = \|f\|^2\,\|g\|^2$$

$$= \langle f,f\rangle\langle g,g\rangle = \int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 g^2(x)\,dx .$$

Svar. Ja!

Vi kommer nu till vinkelbegreppet i allmänna inre produktrum. Hur definieras vinkeln $\alpha = \measuredangle(v,w)$ mellan två vektorer v, w i ett inre produktrum? CS-olikheten

$$|\langle v,w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|$$

kan skrivas ekvivalent på formen

$$-\|v\|\,\|w\| \leq \langle v,w\rangle \leq \|v\|\,\|w\|$$

vilket för $v \neq 0$ och $w \neq 0$ vidare är ekvivalent med

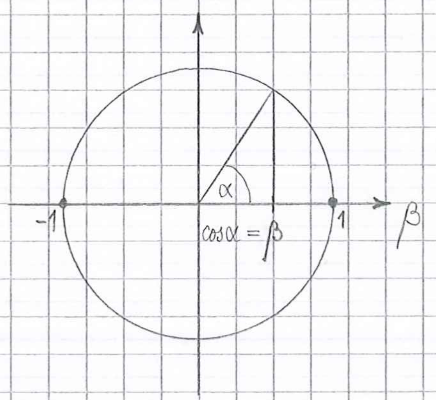
$$-1 \leq \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} \leq 1$$

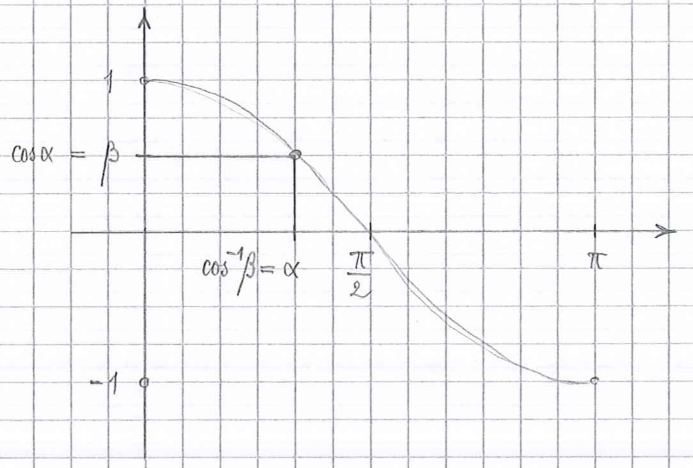
Talet $\beta = \dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} \in [-1,1]$ bestämmer entydigt ett tal $\alpha \in [0,\pi]$ så att

$$\cos\alpha = \beta$$

eller ekvivalent

$$\alpha = \cos^{-1}\beta$$





Givet två vektorer v, w i ett inre produktrum V, så definieras <u>vinkeln</u> $\alpha = \measuredangle(v,w)$ enligt

$$\boxed{\alpha := \begin{cases} \cos^{-1}\left(\dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}\right) & \text{ifall } v \neq 0 \text{ och } w \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{ifall } v = 0 \text{ eller } w = 0 \end{cases}}$$

<u>Ex. 3</u> <u>Bestäm</u> $\alpha = \measuredangle(1, X)$ <u>m.a.p. den inre produkten</u> $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

<u>Lösning.</u> Beräkna först $\beta = \dfrac{\langle 1, X\rangle}{\|1\|\,\|X\|} \underset{\text{se nedan}}{=} \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\langle 1, X\rangle = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\|1\| = \sqrt{\langle 1, 1\rangle} = \sqrt{\int_0^1 1\,dx} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^2\,dx} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Nu är $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ$, då $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

<u>Svar.</u> $\alpha = 30^\circ$.

Två vektorer v, w i ett inre produktrum kallas ortogonala (notation $v \perp w$) om $\sphericalangle(v,w) = \frac{\pi}{2}$.

I enlighet med vinkelns definition gäller

$$\boxed{v \perp w \iff \langle v, w \rangle = 0} \qquad \forall v, w \in V$$

Pythagoras sats. I varje inre produktrum V gäller

$$\boxed{\| v + w \|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2} \qquad \forall\ v \perp w$$

Bevis.
$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + 2\underbrace{\langle v, w \rangle}_{0} + \langle w, w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 . \end{aligned} \qquad \square$$

Förhoppningsvis är vi nu tillräckligt motiverade att se ett

Bevis till CS-olikheten. Låt V vara ett inre produktrum, och $v, w \in V$. Vi ska visa att

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \, \|w\| \qquad (*)$$

gäller. Ifall $v = 0$ gäller $(*)$ även som likhet:

$$|\langle v, w \rangle| = |\langle 0, w \rangle| = |0| = 0 = 0 \, \|w\| = \|0\| \, \|w\| = \|v\| \, \|w\| .$$

Ifall $v \neq 0$ sätter vi $(a, b, c) = (\langle v, v \rangle, 2\langle v, w \rangle, \langle w, w \rangle)$ och vet att

$$a = \langle v, v \rangle > 0$$

på grund av (IP4). Vidare gäller för alla $t \in \mathbb{R}$ att

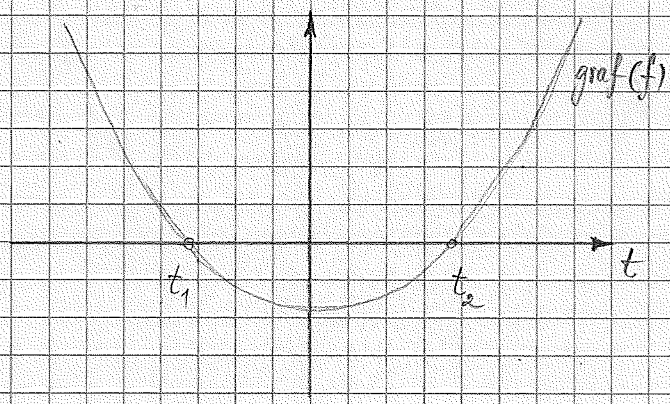
$$0 \leq \langle tv+w, tv+w \rangle = t^2 \langle v,v \rangle + 2t \langle v,w \rangle + \langle w,w \rangle$$

$$= at^2 + bt + c$$

Andragradspolynomet $f(t) = at^2 + bt + c$ har som bekant nollställena

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Om $b^2 - 4ac > 0$, då är $t_1 \neq t_2$, vilket pga $a > 0$ medför att f:s graf har formen



vilket strider mot $f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Alltså gäller

$$b^2 - 4ac \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad b^2 \leq 4ac$$

$$\Rightarrow \quad 4 \langle v,w \rangle^2 \leq 4 \langle v,v \rangle \langle w,w \rangle$$

$$\Rightarrow \quad |\langle v,w \rangle|^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2$$

$$\Rightarrow \quad |\langle v,w \rangle| \leq \|v\| \, \|w\| \qquad \square$$