F11

Gram-Schmidt ortonormalisering

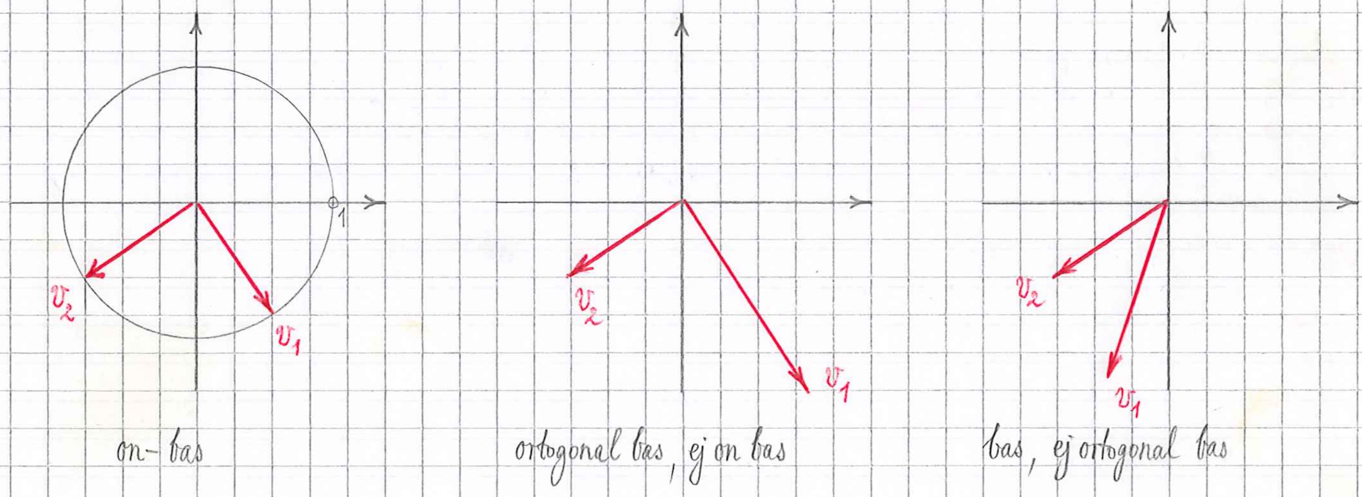
Låt $V = (V, \langle\,\rangle)$ vara ett inre produktrum. En följd av vektorer $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_\ell)$ i V kallas

ortogonal om $v_i \perp v_j \quad \forall\, i \neq j$

ortonormal om $v_i \perp v_j \quad \forall\, i \neq j$ och $\|v_i\| = 1 \quad \forall i$

I synnerhet kan vi prata om ortogonala baser och om ortonormala baser, kort on-baser. Denna föreläsning kretsar kring on-baser: om deras räknemässiga fördelar, och hur de kan konstrueras.

Illustration i fallet $V = \mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, \cdot)$



Till varje nollskild vektor $v \in V$ hör den normerade vektorn $\dfrac{v}{\|v\|} = \dfrac{1}{\|v\|}\, v$. Den har längd 1 då $\left\| \dfrac{1}{\|v\|}\, v \right\| = \dfrac{1}{\|v\|} \|v\| = 1$, och samma riktning som v då den är proportionell till v med faktorn $\dfrac{1}{\|v\|} > 0$.

Termerna normerad vektor, vektor av längd 1, och enhetsvektor är synonyma.

Sats 1. Varje ortogonal följd $\underline{v} = (v_1, \dots, v_\ell)$ av nollskilda vektorer i V är linjärt oberoende. Om dessutom $\ell = \dim V$, då är $\underline{v}$ en ortogonal bas i V, och den normerade följden

$$\underline{v}_n = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_\ell}{\|v_\ell\|} \right)$$

är en on-bas i V.

Ex. 1 I $\mathbb{E}^3$ är följden $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ ortogonal, då

$$v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot v_3 = v_2 \cdot v_3 = 0.$$

Enligt Sats 1 är $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ alltså linjärt oberoende. Vidare är följdens längd $3 = \dim \mathbb{E}^3$, och därmed är $\underline{v}$ en ortogonal bas i $\mathbb{E}^3$. Slutligen är den normerade följden

$$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

en on-bas i $\mathbb{E}^3$.

Bevis till Sats 1. Om $\underline{v}$ är ortogonal och $\sum_{i=1}^{\ell} c_i v_i = 0$, då gäller $\forall j \in \underline{\ell}$ att

$$0 = \langle \underbrace{\sum_i c_i v_i}_{=0}, v_j \rangle = \sum_i c_i \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{=0\ \forall i \neq j} = c_j \underbrace{\langle v_j, v_j \rangle}_{\neq 0} \Rightarrow c_j = 0.$$

Alltså är $\underline{v}$ linjärt oberoende av längd ℓ. Sedan tidigare vet vi att $\ell = \dim V$ medför att $\underline{v}$ är en bas i V. Vidare är den normerade följden $\underline{v}_n$ ortonormal, då

$$\left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|} \right\rangle = \frac{1}{\|v_i\|}\frac{1}{\|v_j\|}\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall\, i \neq j \quad \text{och}$$

$$\left\| \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\| = 1 \quad \forall i.$$ Enligt satsens första påstående är $\underline{v}_n$ en bas. $\square$

Som första tillämpning av on-baser har vi följande

Sats 2. Om $\underline{v} = (v_1, \dots, v_\ell)$ är en on-bas i V, då gäller för varje vektor $u \in V$ att

$$\boxed{u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle u, v_\ell \rangle v_\ell}$$

M.a.o. är $\langle u, v_i \rangle$ just u:s i-te koordinat i basen $\underline{v}$.

Ex. 2 Enligt Ex. 1 är $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ en on-bas i $\mathbb{E}^3$.

Finn u:s koordinater i $\underline{v}$, då $u = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Lösning. Elementär metod. $[u]_{\underline{v}} = T_{\underline{v}\underline{e}} [u]_{\underline{e}} = \left(T_{\underline{e}\underline{v}}\right)^{-1} [u]_{\underline{e}}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \dots \text{räkna på!} \dots$$

Obs. att denna metod fungerar för varje bas $\underline{v}$. Enligt Sats 2 kan vi dock reda oss med mindre räkning, då $\underline{v}$ är en on-bas.

Ny metod. De sökta koordinaterna är koefficienterna c_i i ekvationen $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = u$. Enligt Sats 2 är dessa lika med

$$c_1 = u \cdot v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} 6 = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$c_2 = u \cdot v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c_3 = u \cdot v_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-3) = -\frac{3\sqrt{6}}{6} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \qquad \square$$

Bevis till Sats 2. Då $\underline{v}$ är en bas kan varje $u \in V$ skrivas på formen $u = c_1 v_1 + \dots + c_\ell v_\ell$. För varje $j \in \underline{\ell}$ gäller då att

$$\langle u, v_j \rangle = \langle \sum_i c_i v_i, v_j \rangle = \sum_i c_i \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{=0 \,\forall i \neq j} = c_j \underbrace{\langle v_j, v_j \rangle}_{1} = c_j \qquad \square$$

Hur skapar man en on-bas? Varje bas i V kan faktiskt rätas ut till en on-bas i V, enligt följande

Gram-Schmidt algoritm. Givet en bas $\underline{u} = (u_1, \dots, u_\ell)$ i V, konstruera följden $\underline{v} = (v_1, \dots, v_\ell)$ så här.

Steg 1. $\quad v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$

Steg 2. $\quad v_2 = \dfrac{u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1}{\| \quad \text{dito} \quad \|}$

Steg 3. $\quad v_3 = \dfrac{u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2}{\| \quad \text{dito} \quad \|}$

$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots$

Steg ℓ. $\quad v_\ell = \dfrac{u_\ell - \langle u_\ell, v_1 \rangle v_1 - \langle u_\ell, v_2 \rangle v_2 - \dots - \langle u_\ell, v_{\ell-1} \rangle v_{\ell-1}}{\| \quad \text{dito} \quad \|}$

Då är $\underline{v}$ en on-bas i V.

Ex. 3 Tillämpa Gram-Schmidt algoritmen på basen $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ i E^3.

Steg 1. $\quad v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Steg 2. $$v_2 = \frac{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} - 0\,v_1}{\|\quad \text{dito} \quad\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Steg 3. $$v_3 = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - 0\,v_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}{\|\quad \text{dito} \quad\|} = \frac{\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1\end{pmatrix}}{\|\text{dito}\|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}}{\|\text{dito}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Svar. Vi får on-basen $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ från Ex. 1 och Ex. 2.

Varför alstrar Gram-Schmidt algoritmen en on-bas?

Steg 1. $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$ är normerad.

Steg 2. $v_2 = \frac{u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1}{\|\quad \text{dito} \quad\|}$ är normerad, och

$$\langle v_2, v_1\rangle = \frac{1}{\|\text{dito}\|}\langle u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1,\ v_1\rangle$$

$$= \frac{1}{\|\text{dito}\|}\underbrace{\left(\langle u_2, v_1\rangle - \langle u_2, v_1\rangle \underbrace{\langle v_1, v_1\rangle}_{1 \text{ enligt Steg } 1}\right)}_{0} = 0$$

Alltså är v_1, v_2 en on-följd av längd 2.

Steg 3 alstrar $v_3 = \frac{u_3 - \langle u_3, v_1\rangle v_1 - \langle u_3, v_2\rangle v_2}{\|\quad \text{dito} \quad\|}$ så att v_3 är normerad och (kolla själv!)

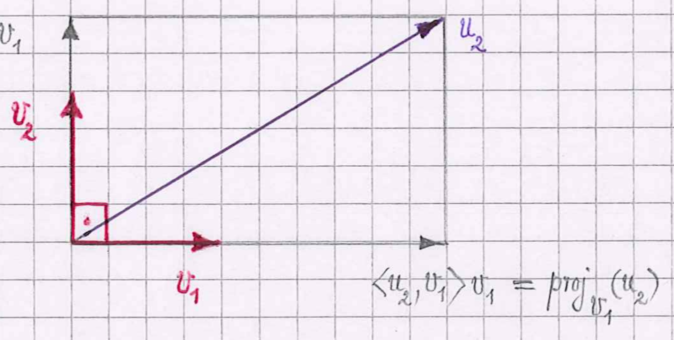
$\langle v_3, v_1\rangle = \langle v_3, v_2\rangle = 0$. Alltså är v_1, v_2, v_3 en on-följd av längd 3, osv.

Geometrisk tolkning av Steg 2 ifall $V = \mathbb{E}^2$

u_2 rätas upp till $u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1$

som är ortogonal mot v_1.

Normering ger v_2.

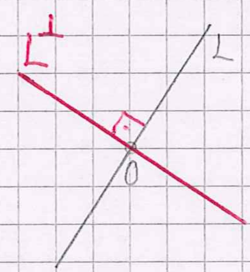


Om $U \subset V$ är ett delrum, då är

$$U^{\perp} := \{ v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \ \forall u \in U \}$$

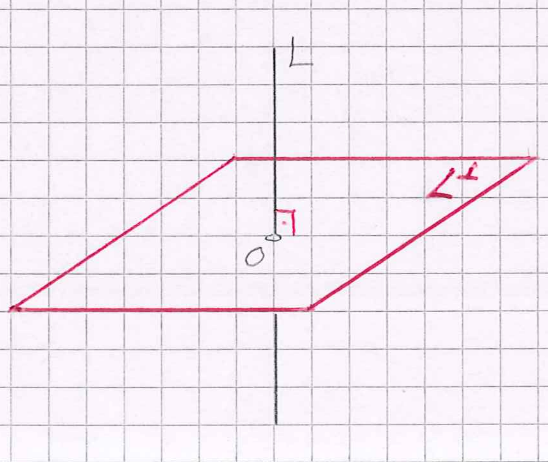
också ett delrum, kallat det ortogonala komplementet till U.

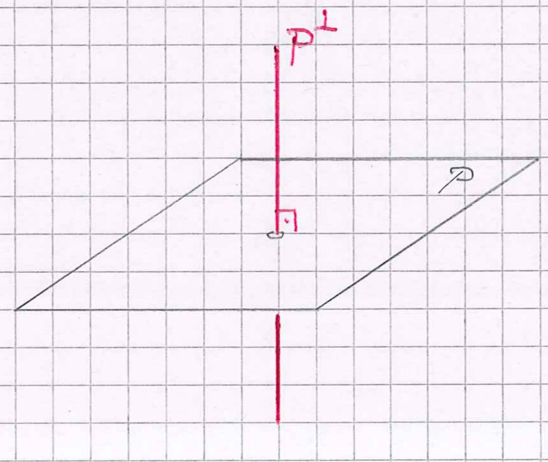
Exempel. a) Om $L \subset \mathbb{E}^2$ är en linje genom origo, då är $L^{\perp}$ den linje genom origo som är ortogonal mot L.



b) Om $L \subset \mathbb{E}^3$ är en linje genom origo, då är $L^{\perp}$ det plan genom origo som är ortogonal mot L.

c) Om $P \subset \mathbb{E}^3$ är ett plan genom origo, då är $P^{\perp}$ den linje genom origo som är ortogonal mot P.





Ortogonal uppdelning av en given vektor med avseende på ett givet delrum.

Med hjälp av Gram-Schmidt algoritmen kan vi lösa följande

Problem. Givet ett delrum $\mathcal{U} \subset V$ och en vektor $w \in V$, skriv w som summa

$$w = u + v \quad , \text{ där } u \in \mathcal{U} \text{ och } v \in \mathcal{U}^{\perp}.$$

Summanderna u och v är faktiskt entydigt bestämda av w (beviset rekommenderas som övning), och betecknas

$$u = \mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(w) = w\text{:s ortogonala projektion på } \mathcal{U}$$
$$v = \mathrm{proj}_{\mathcal{U}^{\perp}}(w) = w\text{:s ortogonala projektion på } \mathcal{U}^{\perp}.$$

Lösning. Om $(u_1, \ldots, u_\ell)$ är en on-bas i $\mathcal{U}$, då löses problemet av

$$\boxed{u = \langle w, u_1 \rangle u_1 + \ldots + \langle w, u_\ell \rangle u_\ell} \qquad \text{samt} \quad v = w - u$$

Bevis. $u = \sum_i \langle w, u_i \rangle u_i \in \mathcal{U}$ och $w = u + v$ gäller enligt konstruktion av u och v.

Återstår att visa att $v \in \mathcal{U}^{\perp}$. Det räcker att visa att $v \perp u_j \;\; \forall j \in \underline{\ell}$.

$$\begin{aligned}
\langle v, u_j \rangle = \langle w - u, u_j \rangle &= \langle w, u_j \rangle - \langle u, u_j \rangle \\
&= \langle w, u_j \rangle - \Big\langle \sum_{i=1}^{\ell} \langle w, u_i \rangle u_i \, , \, u_j \Big\rangle \\
&= \langle w, u_j \rangle - \sum_{i=1}^{\ell} \langle w, u_i \rangle \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{= \begin{cases} 0 & \text{om } i \neq j \\ 1 & \text{om } i = j \end{cases}} \\
&= \langle w, u_j \rangle - \langle w, u_j \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\square$

Ex. 4 Givet $\mathcal{U} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{E}^4$ och $w = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\-2\end{pmatrix} \in \mathbb{E}^4$, finn

$u = \text{proj}_{\mathcal{U}}(w)$ och $v = \text{proj}_{\mathcal{U}^\perp}(w)$.

Lösning. $a_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ är linjärt oberoende och $\text{span}\{a_1, a_2\} = \mathcal{U}$.

Alltså är $\underline{a} = (a_1, a_2)$ en bas i $\mathcal{U}$. Med hjälp av Gram-Schmidt algoritmen tillverkar vi utav $\underline{a}$ en on-bas $\underline{b}$ i $\mathcal{U}$.

$$b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$b_2 = \frac{a_2 - (a_2 \cdot b_1)\, b_1}{\|\text{dito}\|} = \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}{\|\text{dito}\|} = \frac{\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\\1/2\end{pmatrix}}{\|\text{dito}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$$

Därmed är

$$u = \text{proj}_{\mathcal{U}}(w) = \langle w, b_1\rangle b_1 + \langle w, b_2\rangle b_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\0\\-1/3\end{pmatrix}$$

och

$$v = \text{proj}_{\mathcal{U}^\perp}(w) = w - u = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\0\\-1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/3\\5/3\\0\\-5/3\end{pmatrix}.$$

Svar. $u = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $v = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\5\\0\\-5\end{pmatrix}$.