F 12

Ortogonala matriser

En kvadratisk matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kallas ortogonal om $AA^T = I$.

Kom ihåg att $AB = I$ med $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ alltid medför att även $BA = I$, och därmed att $B = A^{-1}$. Alltså är

$$\boxed{A \text{ ortogonal} \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} AA^T = I \Leftrightarrow A^T = A^{-1}}$$

Ex. 1 För $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ är $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = A^T$, alltså är A ortogonal.

I Ex. 1 beräknade vi A^{-1} för att inse att A är ortogonal. Det vore förstås önskvärt att först kunna fastställa A:s ortogonalitet på ett enkelt sätt, för att sedan ännu enklare kunna skriva ner inversen:

$$A \text{ är ortogonal (varför ?!)} \Rightarrow A^{-1} = A^T$$

Ett sådant lätthanterligt kriterium för A:s ortogonalitet beskrivs i följande

Sats 1. För varje matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är de följande påståendena ekvivalenta.

(i) A är ortogonal

(ii) A:s kolonnföljd $A_{\bullet 1}, \dots, A_{\bullet n}$ är en on-bas i $\mathbb{E}^n$.

Ex. 2 Kolonnföljden i $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ uppfyller $A_{\bullet i} \bullet A_{\bullet j} = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{om } i = j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$,

är därmed en on-följd av längd 3 i $\mathbb{E}^3$, alltså en on-bas i $\mathbb{E}^3$. Enligt Sats 1 är därmed A ortogonal, alltså $A^{-1} = A^T \underset{\text{här}}{=} A$.

Ex. 3 Enligt F11 är kolonnföljden i $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ en on-bas i $\mathbb{E}^3$.

Enligt Sats 1 är därmed A ortogonal, alltså

$$A^{-1} = A^{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

I denna föreläsning studerar vi ortogonala matriser, deras trevliga räknemässiga egenskaper, och deras samband med on-baser. Sats 1 bidrar ju redan till detta ämne.

Bevis till Sats 1. (ii) $\Rightarrow$ (i). Enligt antagande gäller $\forall\, jk \in \underline{n} \times \underline{n}$ att

$$\delta_{jk} = A_{\cdot j} \cdot A_{\cdot k} = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (A^{T})_{ji} A_{ik} = (A^{T}A)_{jk}, \quad \text{alltså}$$

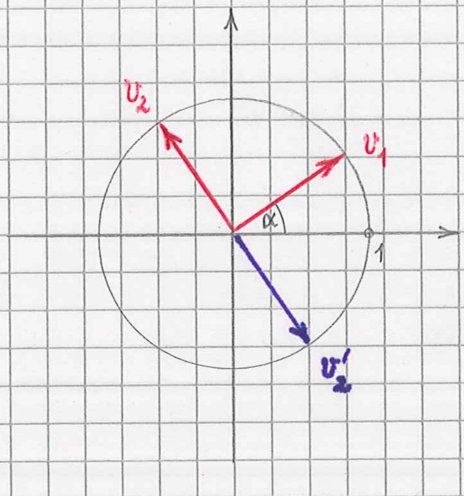
$$A^{T}A = I \Rightarrow AA^{T} = I \Rightarrow A \text{ ortogonal}.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) bevisas snarlikt. Detaljerna lämnas som övning. $\square$

Ex. 4 Beskriv alla ortogonala 2×2-matriser!

Lösning. Enligt Sats 1 korresponderar de med alla on-följder (v_1, v_2) i $\mathbb{R}^2$, dvs. med alla on-par. Dessa bestäms av en vinkel α som ger enhetsvektorn v_1, samt valet av orienteringen "moturs" eller "medurs" som ger v_2 eller v_2'. (Se figur nedan.) De motsvarande ortogonala 2×2-matriserna är

$$R_\alpha = (v_1 | v_2) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad S_\alpha = (v_1 | v_2') = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{där } 0 \le \alpha < 2\pi.$$



Obs att $\det(R_\alpha) = 1$ och $\det(S_\alpha) = -1$ för alla α. Detta är ingen slump!

Sats 2. För varje ortogonal matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gäller att $\boxed{\det(A) = \pm 1}$.

Bevis. $AA^T = I$ medför att

$$1 = \det(I) = \det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = \det(A)\det(A),$$

varav $\det(A) = \pm 1$. □

Sats 3. Om A och B är ortogonala $n\times n$-matriser, då är även $A^{-1} = A^T$ och AB ortogonala $n\times n$-matriser.

Bevis. A ortogonal $\Rightarrow AA^T = I$
$\Rightarrow I = A^TA = A^T(A^T)^T$
$\Rightarrow A^T$ ortogonal.

A, B ortogonala $\Rightarrow (AB)(AB)^T = A(BB^T)A^T = AIA^T = AA^T = I$
$\Rightarrow AB$ ortogonal. □

Därmed kan vi komplettera Sats 1 med den tredje ekvivalenta egenskapen

(iii) A:s radföljd $A_{1\cdot}, \dots, A_{n\cdot}$ är en on-bas i $\mathbb{E}^n$.

Bevis till (i) $\Leftrightarrow$ (iii). A ortogonal $\underset{\text{Sats 3}}{\Leftrightarrow}$ A^T ortogonal

$\underset{\text{Sats 1}}{\Leftrightarrow}$ A^T:s kolonnföljd är en on-bas i $\mathbb{E}^n$

$\Leftrightarrow$ A:s radföljd är en on-bas i $\mathbb{E}^n$. $\square$

Här kommer en intressant geometrisk karaktärisering av ortogonala matriser.

Sats 4. För varje matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är de följande påståendena ekvivalenta.

(i) A är ortogonal.

(ii) $\|Ax\| = \|x\|$ för alla $x \in \mathbb{E}^n$.

(iii) $Ax \cdot Ay = x \cdot y$ för alla $x, y \in \mathbb{E}^n$.

Geometrisk tolkning av Sats 4. Kom ihåg korrespondensen mellan kvadratiska matriser och linjära operatorer:

$$\mathbb{R}^{n \times n} \rightleftarrows \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

$$A \longmapsto f_A \qquad \text{där } f_A(x) = Ax$$

$$[f] \longleftarrow\!\shortmid f$$

Mot denna bakgrund kan vi skriva (ii) och (iii) på formen

(ii) $\|f_A(x)\| = \|x\| \quad \forall\, x \in \mathbb{E}^n$ dvs. operatorn f_A bevarar längder

(iii) $f_A(x) \cdot f_A(y) = x \cdot y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{E}^n$ dvs. operatorn f_A bevarar skalärprodukter

Vi kan alltså formulera om Sats 4 i geometrisk tappning så här.

Sats 4 (Geometrisk tappning). En linjär operator f på $\mathbb{E}^n$ bevarar alla längder omm den bevarar alla skalärprodukter. Detta inträffar omm operatorns matris $[f]$ är ortogonal.

Korollarium. Om $f: \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ är speglingen i ett plan genom origo, då är $[f]$ ortogonal och symmetrisk. Om $g: \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ är rotationen med vinkel α kring en axel genom origo, då är $[g]$ ortogonal.

Bevis. Speglingen och rotationen bevarar alla längder. För speglingens matris gäller dessutom

$$[f]^T \underset{[f] \text{ ortogonal}}{=} [f]^{-1} = [f^{-1}] = [f] . \qquad \square$$

Ex. 5 Låt f vara speglingen i planet $P: x+y+z=0$. Då är

$$[f] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{ortogonal och symmetrisk.}$$

Ex. 6 Låt g vara rotationen med vinkel $\frac{2\pi}{3}$ kring rymddiagonalen $\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$. Då är

$$[g] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ortogonal.}$$

Beviset till Sats 4 förbereder vi med följande

Anmärkning. I ett inre produktrum definieras längden med hjälp av den inre produkten enligt $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Man återfår den inre produkten utifrån längden enligt

$$\boxed{\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)}$$

Verifikationen lämnas som övning.

Bevis till Sats 4. (i) $\Rightarrow$ (ii).
$$\|Ax\|^2 = Ax \cdot Ax = (Ax)^T Ax = x^T A^T A x = \underset{(i)}{=} x^T I x = x^T x = x \cdot x = \|x\|^2$$
$$\Rightarrow \quad \|Ax\| = \|x\|$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii).
$$Ax \cdot Ay \underset{\text{Anm}}{=} \frac{1}{2}\left(\|Ax+Ay\|^2 - \|Ax\|^2 - \|Ay\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|A(x+y)\|^2 - \|Ax\|^2 - \|Ay\|^2\right)$$
$$\underset{(ii)}{=} \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \underset{\text{Anm}}{=} x \cdot y$$

(iii) $\Rightarrow$ (i).
$$x^T A^T A y = (Ax)^T Ay = Ax \cdot Ay \underset{(iii)}{=} x \cdot y = x^T y = x^T I y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$
$$\Rightarrow (A^T A)_{ij} = e_i^T (A^T A) e_j = e_i^T I e_j = I_{ij} \qquad \forall\, ij \in \underline{n}^2$$
$$\Rightarrow A^T A = I \Rightarrow A A^T = I. \qquad \square$$

Sats 1 och Sats 4 beskriver samband mellan ortogonala matriser och det standardeuklidiska rummet $\mathbb{E}^n$. Finns det något samband mellan ortogonala matriser och ickestandardeuklidiska rum? I den vägen är de följande två satserna av intresse.

Sats 5. Låt $V = (V, \langle\ \rangle)$ vara ett euklidiskt rum, med on-bas $\underline{b} = (b_1, \dots, b_\ell)$.
Låt $v, w \in V$, med $[v]_{\underline{b}} = x$ och $[w]_{\underline{b}} = y$. Då gäller

(i) $\|v\| = \|x\| = \sqrt{x \cdot x}$

(ii) $d(v, w) = d(x, y) = \sqrt{(x-y) \cdot (x-y)}$

(iii) $\langle v, w \rangle = x \cdot y$

Obs. att vänsterledens längd, avstånd, skalärprodukt avser det allmänna euklidiska rummet V, medan högerledens längd, avstånd, skalärprodukt avser det standardeuklidiska rummet $\mathbb{E}^n$. Övergången förmedlas av en on-bas i V.

Ex. 7 I det euklidiska rummet $\mathcal{P}$, med $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$ är standardbasen $1, X, X^2$ ej on-bas. Gram-Schmidt algoritmen alstrar dock on-basen

$$b_1 = 1, \quad b_2 = \sqrt{3}(2X - 1), \quad b_3 = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1).$$

För polynomet $v = (1 - \sqrt{3} + \sqrt{5})1 + (2\sqrt{3} - 6\sqrt{5})X + 6\sqrt{5}X^2$ beräknas längden enligt definition enligt

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\int_0^1 \left((1 - \sqrt{3} + \sqrt{5}) + (2\sqrt{3} - 6\sqrt{5})x + 6\sqrt{5}x^2\right)^2 dx},$$

men enligt Sats 5 enklare som

$$\|v\| = \|x\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3},$$

då $v = b_1 + b_2 + b_3$ innebär att $[v]_{\underline{b}} = x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sats 6. I varje euklidiskt rum är basbytesmatrisen $T_{\underline{b}\,\underline{a}}$ från en on-bas $\underline{a}$ till en on-bas $\underline{b}$ en ortogonal matris.