F13

Spektralsatsen

Kom ihåg (se F8) att en kvadratisk matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kallas diagonaliserbar om det finns en bas $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ i $\mathbb{R}^n$ som består av idel egenvektorer till A. Ekvivalent finns det en inverterbar matris T och en diagonalmatris D så att $T^{-1} A T = D$. Ekvivalensen är konstruktiv i följande mening.

Är $\underline{b}$ en bas med $A b_j = \lambda_j b_j \ \forall j \in \underline{n}$, då uppfyller $T = (b_1 | \ldots | b_n)$ och $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ matrisekvationen $T^{-1} A T = D$. Uppfyller omvänt T och $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ matrisekvationen $T^{-1} A T = D$, då är $(T_{\cdot 1}, \ldots, T_{\cdot n})$ en bas med $A T_{\cdot j} = d_j T_{\cdot j} \ \forall j \in \underline{n}$.

Hur avgör man om en given matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är diagonaliserbar? Man beräknar A:s egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ samt dimensionerna $d_i = \dim E(\lambda_i) \ \forall i \in \underline{\ell}$. Då gäller

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\ell} d_i \leq n \quad , \text{ med likhet omm } A \text{ är diagonaliserbar.}}$$

Konstruktivt formulerat väljer man en bas $\underline{b}^i = (b_1^i, \ldots, b_{d_i}^i)$ i varje egenrum $E(\lambda_i)$ och lägger ihop dessa till en följd $\underline{b} = (\underline{b}^1, \ldots, \underline{b}^\ell)$, som består av idel egenvektorer till A.

> Följden $\underline{b}$ är linjärt oberoende och har längd $\sum_{i=1}^{\ell} d_i \leq n$.
>
> Om $\sum_{i=1}^{\ell} d_i = n$, då är $\underline{b}$ en bas som består av idel egenvektorer till A.

Givet $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, så kan man i allmänhet inte "se direkt" om A är diagonaliserbar, utan kriteriet $\sum d_i = n$ måste verifieras genom mödosamma räkningar. Det finns dock två undantagstyper av matriser, för vilka man direkt vet att de är diagonaliserbara.

1) Övre (eller nedre) triangulära matriser $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$ med olika diagonalelement a_i är alltid diagonaliserbara.

Här är A:s egenvärden just $a_1, \dots, a_n$ (varför ?!)

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} d_i \geq n \qquad \text{(varför ?!)}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} d_i = n$$

$\Rightarrow$ A är diagonaliserbar.

Ex. 1 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ är övre triangulär med olika diagonalelement $-1, 0, 1$.

Dessa är A:s egenvärden. Alla tre egenrum $E(-1)$, $E(0)$, $E(1)$ har dimension 1 (varför ?!).

Gaussalgoritmen visar att $E(-1) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $E(0) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $E(1) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Alltså är $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en bas i $\mathbb{R}^3$ med $Ab_1 = -b_1$, $Ab_2 = 0$, $Ab_3 = b_3$.

Matriserna $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ uppfyller då $T^{-1}AT = D$.

2) Symmetriska matriser $A = A^T$ är alltid diagonaliserbara. Närmare bestämt är de även ortogonalt diagonaliserbara. Detta är innebörden i den såkallade

Spektralsatsen. För varje symmetrisk matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ finns det en ortogonal matris S och en diagonalmatris D så att

$$\boxed{S^T A S = S^{-1} A S = D}$$

Ekvivalent finns det en ON-bas $b = (b_1, \dots, b_n)$ i $\mathbb{R}^n$ med $Ab_j = \lambda_j b_j$ $\forall j \in \underline{n}$.

Mellan matriserna S, D och följderna $\underline{b}$, $\underline{\lambda}$ råder samma konstruktiva samband som ovan.

Ex. 2 (2004-08-18:6) Låt $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Avgör om det finns någon ortogonal matris S så att $S^{-1}AS = D$ är en diagonalmatris. Om så är fallet, finn en sådan matris S och ange D.

Lösning. Enligt Spektralsatsen finns en sådan matris S, då A är symmetrisk. Den har formen $S = (b_1 | b_2 | b_3)$, där $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ är en on-bas i $\mathbb{R}^3$ med $Ab_i = \lambda_i b_i \ \forall i \in \underline{3}$.

a) Bestäm A:s egenvärden.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2\lambda-2 & 0 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2\lambda-2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda-8 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-8) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-8)$$

har rötterna $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 8$.

b) Finn baser i $E(-1)$ och $E(8)$.

$$E(-1) = N(-I-A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}^{a_1}, \overbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{a_2} \right\}.$$

$$-I-A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x_1 = -\tfrac{1}{2}x_2 - x_3$$

$$E(8) = N(8I-A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}^{a_3} \right\}.$$

$$8I-A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 9 \end{pmatrix}_{-\frac{1}{18}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

c) Finn on-baserna $(b_1, b_2) = GS(a_1, a_2)$ i $E(-1)$ och $b_3 = \frac{a_3}{\|a_3\|}$ i $E(8)$.

$$b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},$$

$$b_2 = \frac{a_2 - (a_2 \cdot b_1)\, b_1}{\| \quad \cdots \quad \|} = \frac{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}}\, 1\, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}}{\| \quad \cdots \quad \|} = \frac{\begin{pmatrix}-4/5\\-2/5\\1\end{pmatrix}}{\| \cdots \|} = \frac{\begin{pmatrix}-4\\-2\\5\end{pmatrix}}{\sqrt{45}} = \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix}-4\\-2\\5\end{pmatrix},$$

$$b_3 = \frac{a_3}{\|a_3\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Svar. $S = (b_1 | b_2 | b_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ är ortogonal, och

$$S^{-1}AS = D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 8 \end{pmatrix}.$$

Glömde vi inte att verifiera $b_1 \cdot b_3 = b_2 \cdot b_3 = 0$? Jo, det glömde vi. Å andra sidan behöver man faktiskt inte verifiera det, då det måste vara så p.g.a. följande

Sats. Låt $\lambda \neq \mu$ vara två olika egenvärden till en symmetrisk matris A. Då gäller för alla $v \in E(\lambda)$ och $w \in E(\mu)$ att $v \perp w$.

Bevis.
$$\begin{array}{ccccccccc} Av \cdot w & = & (Av)^T w & = & v^T A^T w & = & v^T A w & = & v \cdot Aw \\ \| & & & & & & & & \| \\ \lambda v \cdot w & & & & & & & & v \cdot \mu w \\ \| & & & & & & & & \| \\ \lambda(v \cdot w) & & & & & & & & \mu(v \cdot w) \end{array} \Rightarrow \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0}(v \cdot w) = 0$$

$$\Rightarrow v \cdot w = 0. \qquad \square$$

Kvadratiska former

En kvadratisk form i två variabler x_1, x_2 är en avbildning $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ av formen

$$q(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 .$$

En kvadratisk form i tre variabler x_1, x_2, x_3 är en avbildning $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ av formen

$$q(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_{23} .$$

En kvadratisk form i n variabler $x_1, \dots, x_n$ är en avbildning $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ av formen

$$\boxed{q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij}x_ix_j} ,$$

med konstanta koefficienter a_{ij}.

Ex. 3 Den symmetriska matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ bestämmer en kvadratisk form

$$q_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} , \quad q_A(x) = x^T A x = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1x_2 + 3x_2x_1$$
$$= x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_1x_2 .$$

På samma sätt bestämmer varje symmetrisk matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en kvadratisk form

$$\boxed{q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} , \quad q_A(x) = x^T A x = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} 2A_{ij}x_ix_j} ,$$

då

$$x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} \underbrace{(A_{ij}x_ix_j + A_{ji}x_jx_i)}_{2A_{ij}x_ix_j} .$$

Omvänt kan varje kvadratisk form $\quad q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij} x_i x_j$

skrivas som matrisprodukt $\quad q(x) = x^T A x = q_A(x)$,

då vi definierar den symmetriska matrisen A enligt

$$\begin{cases} A_{ii} = a_{ii} & \forall i \\ A_{ji} = A_{ij} = a_{ij} & \forall i<j \end{cases}$$

Sammanfattningsvis utgör sambandet $A \mapsto q_A$ en korrespondens mellan symmetriska matriser och kvadratiska former, vilket innebär att det för varje kvadratisk form q finns precis en symmetrisk matris A så att $q = q_A$.

I konkreta exempel ter sig denna korrespondens mycket enkelt.

Ex. 4 $\quad$ För $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ är $q_A(x) = x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 8x_1x_3 + 10x_2x_3$.

Ex. 5 $\quad$ För $q(x) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3$ är $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$ den entydigt bestämda symmetriska matris som uppfyller $\quad q(x) = x^T A x = q_A(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$.

Då kvadratiska former är så nära förknippade med symmetriska matriser har spektralsatsen stor genomslagskraft även hos kvadratiska former. Grovt sagt kan vi nu lösa problem av följande typ.

Problem. Givet en kvadratisk form $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, beskriv lösningsmängden till ekvationen

$$q(x) = k \qquad (k \text{ konstant})$$

geometriskt.

Ex. 6 Beskriv kurvan $K: \ 13x^2 + 13y^2 - 10xy = 72$ geometriskt. Ange kurvans största och minsta avstånd från origo, och ange de punkter på kurvan där största och minsta avståndet antas.

Lösning. Punkter i planet betecknar vi med $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ istället för (x,y). Vänsterledet i ekvationen ovan är en kvadratisk form

$$q(x) = 13x_1^2 + 13x_2^2 - 10x_1x_2 = x^T A x \quad \text{för } A = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}.$$

Kurvan K är alltså lösningsmängden till ekvationen $x^T A x = 72$.

a) Finn en ortogonal matris S och en diagonalmatris D så att $S^T A S = D$.
(Dessa finns enligt Spektralsatsen.)

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 13 & 5 \\ 5 & \lambda - 13 \end{vmatrix} = (\lambda - 13)^2 - 5^2 = (\lambda - 18)(\lambda - 8)$$

har rötterna $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 18$. Dessa är A:s egenvärden. De tillhörande egenrummen är

$$E(8) = N(8I - A) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$8I - A = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x_1 = x_2$$

$$E(18) = N(18I - A) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$18I - A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x_1 = -x_2$$

Alltså är $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en on-bas i $\mathbb{R}^2$ med $Ab_1 = 8b_1$, $Ab_2 = 18b_2$.

Därmed är $S = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ ortogonal och $D = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$ diagonal så att

$$S^T A S = D.$$

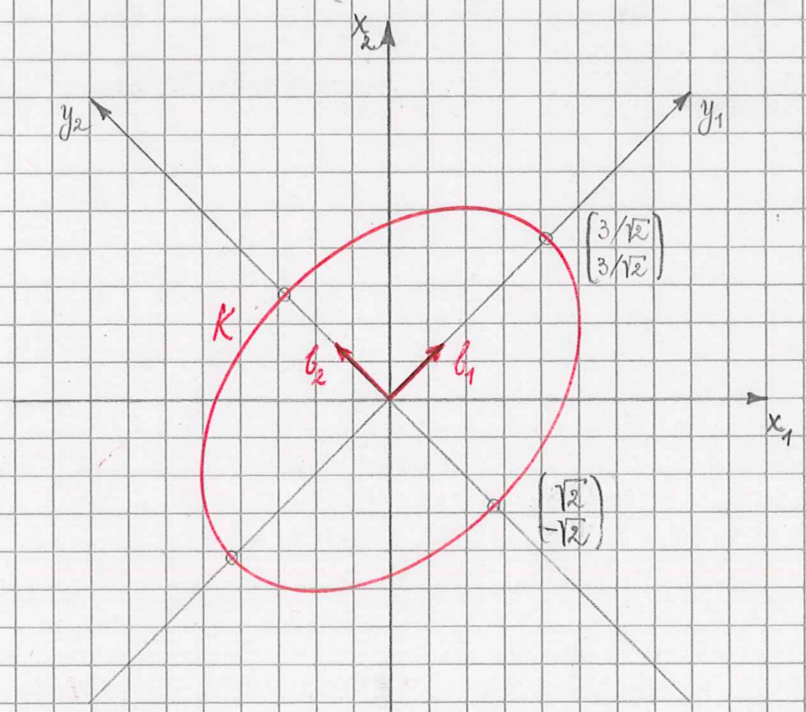
b) Tolka $K: q(x) = x^TAx = 72$ med hjälp av a).

$$q(x) = x^TAx = x^TS(S^TAS)S^Tx = (S^Tx)^T D (S^Tx) = y^TDy = 8y_1^2 + 18y_2^2 ,$$

där $\quad y = S^Tx = (T_{\underline{e}\underline{b}})^{-1}[x]_{\underline{e}} = T_{\underline{b}\underline{e}}[x]_{\underline{e}} = [x]_{\underline{b}} ,$

dvs $\quad x = y_1b_1 + y_2b_2$. Alltså är

$$x \in K \iff q(x) = 72 \iff 8y_1^2 + 18y_2^2 = 72 \iff \frac{y_1^2}{9} + \frac{y_2^2}{4} = 1 .$$



Svar. Kurvan K är en ellips med radie 3 på axeln span $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ och radie 2 på axeln span $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

Största avståndet 3 från origo antas då $y_2 = 0$ i punkterna $\pm\begin{pmatrix}3/\sqrt{2}\\3/\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

Minsta avståndet 2 från origo antas då $y_1 = 0$ i punkterna $\pm\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$.