F 14

Kvadratiska former

I steg (b) av det föregående exemplet använde vi ett resonemang som inte alls beror på exemplets specifika siffror. I allmän tappning leder det till följande

Sats 1 (Ortogonal diagonalisering av kvadratiska former). För varje kvadratisk form

$$\boxed{q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij} x_i x_j}$$

finns det en on-bas $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ i $\mathbb{R}^n$ så att

$$\boxed{q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2}$$

gäller för alla $x = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i \in \mathbb{R}^n$.

Bevis. Det finns (exakt) en symmetrisk matris A så att $q(x) = x^T A x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Enligt Spektralsatsen finns det en on-bas $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ i $\mathbb{R}^n$ med $Ab_i = \lambda_i b_i \quad \forall i \in \underline{n}$.

Matriserna $S = (b_1 | \dots | b_n)$ och $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ uppfyller då $S^T A S = D$.

Med $y = S^T x$ blir

$$q(x) = x^T A x = x^T (SS^T) A (SS^T) x = (x^T S)(S^T A S)(S^T x) =$$

$$= y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 ,$$

och

$$y = S^T x = S^{-1} x = (T_{\underline{e}\underline{b}})^{-1} [x]_{\underline{e}} = T_{\underline{b}\underline{e}} [x]_{\underline{e}} = [x]_{\underline{b}} . \qquad \square$$

Ex. 2 Beskriv ytan Y: $3x^2 + 3z^2 + 4xy + 8xz + 4yz = -1$ geometriskt. Ange ytans minstå avstånd från origo, och ange de punkter på ytan där minsta avståndet antas.

Lösning. a) Punkter i $\mathbb{R}^3$ betecknar vi med $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ istället för (x, y, z). Vänsterledet i ytans ekvation är en kvadratisk form

$$q(x) = 3x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3 = x^T A x \quad \text{för} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

I F 13 Ex. 6 beräknade vi on-basen

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{med} \quad Ab_1 = -b_1, \; Ab_2 = -b_2, \; Ab_3 = 8b_3.$$

Enligt beviset till Sats 1 gäller då för alla $x = \sum_{i=1}^{3} y_i b_i \in \mathbb{R}^3$ att

$$q(x) = -y_1^2 - y_2^2 + 8y_3^2 .$$

Därmed är

$$\begin{aligned} x \in Y &\iff q(x) = -1 \\ &\iff -y_1^2 - y_2^2 + 8y_3^2 = -1 \\ &\iff y_1^2 + y_2^2 = 1 + 8y_3^2 \end{aligned}$$

b) Geometrisk tolkning. Snittet av Y med planet $y_3 = c$ (konstant) beskrivs av

$$y_1^2 + y_2^2 = 1 + 8c^2$$

vilket är cirkeln i planet $y_3 = c$ med centrum $(0, 0, c)$ och radie $r = \sqrt{1 + 8c^2}$.

Paret (r, c) uppfyller

$$r^2 = 1 + 8c^2$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 - 8c^2 = 1$$

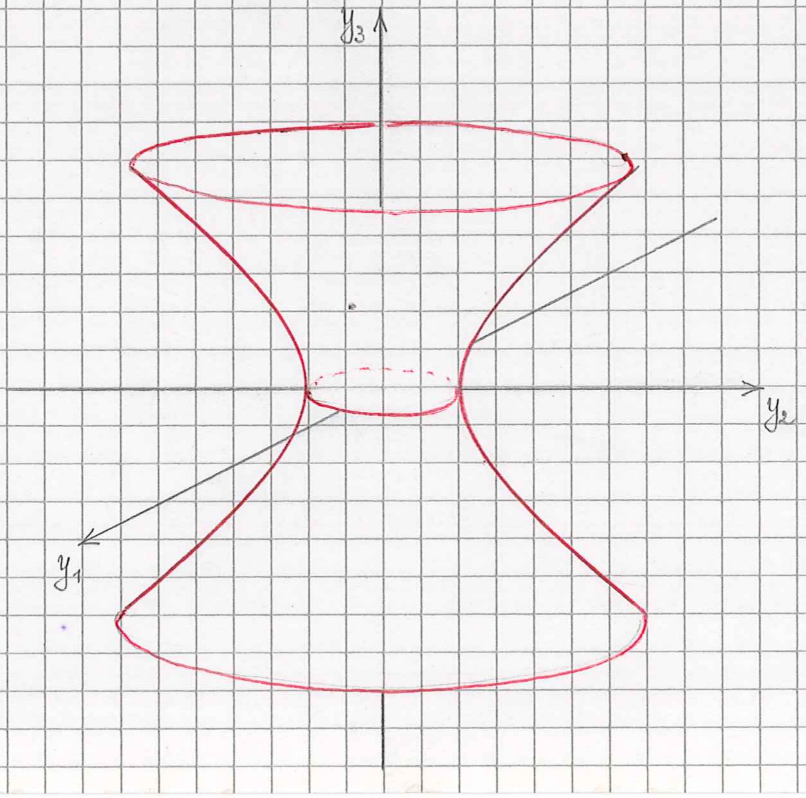
$$\Leftrightarrow \quad (r + \sqrt{8}\,c)(r - \sqrt{8}\,c) = 1$$

vilket är hyperbeln med asymptoterna $r = \pm\sqrt{8}\,c$. Samma hyperbel fås som snittkurva av Y med planet $y_1 = 0$. Denna beskrivs ju av

$$y_2^2 = 1 + 8\,y_3^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (y_2 + \sqrt{8}\,y_3)(y_2 - \sqrt{8}\,y_3) = 1 .$$

Alltså är Y den yta som uppstår när hyperbeln $y^2 - 8y_3^2 = 1$ snurrar runt y_3-axeln. Den typen av yta kallas för en enmantlad rotationshyperboloid. Snurrar man samma hyperbel runt y_2-axeln, så fås en tvåmantlad rotationshyperboloid. Är den första snittkurvan inte en cirkel utan en ellips, då stryker man prefixet "rotations" och pratar om enmantlad (resp. tvåmantlad) hyperboloid.



Från figuren ser vi att minsta avståndet från origo är 1 då $y_3 = 0$. Formellt resonerar man så här.

För alla x är $\|x\| \overset{!}{=} \|y\|$, då $y = [x]_{\underline{b}}$ i on-basen $\underline{b}$.

För alla $x \in Y$ gäller $y_1^2 + y_2^2 = 1 + 8y_3^2$, alltså

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 + 9y_3^2 \geq 1,$$

med likhet omm $y_3 = 0$ $(\text{och } y_1^2 + y_2^2 = 1)$.

Svar. Y är en enmantlad rotationshyperboloid. Minsta avståndet från origo är 1. Den antas på punkterna

$$y_1 b_1 + y_2 b_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} y_1 - \frac{4}{\sqrt{45}} y_2 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} y_1 - \frac{2}{\sqrt{45}} y_2 \\ \frac{5}{\sqrt{45}} y_2 \end{pmatrix}, \quad \text{då } y_1^2 + y_2^2 = 1.$$

Ex. 3 Variera Ex. 2 genom att byta högerledet -1 i ytans ekvation mot 1 respektive 0.

Lösning. Rekommenderas som övning!

Vi avrunder ämnet kvadratiska former med en svagare variant till Spektralsatsen, kallad Tröghetslagen. Med denna kan man bestämma typen av lösningsmängderna till $q(x) = k$ utan att beräkna egenvärden, dock till priset att man förlorar information om avstånd och vinklar.

Sats 2 (Tröghetslagen). För varje symmetrisk matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ finns det en inverterbar matris S så att

$$S^T A S = D = \begin{pmatrix} I_\ell & & \\ & -I_m & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Härvid är talen ℓ och m (och därmed D) entydigt bestämda av A. Diagonalföljden $\underbrace{1,\dots,1}_{\ell},\underbrace{-1,\dots,-1}_{m},\underbrace{0,\dots,0}_{n-\ell-m}$ kallas för A:s signatur, och diagonalmatrisen D kallas för A:s tröghetsform.

Tillämpad på kvadratiska former ger detta

Sats 3 (Diagonalisering av kvadratiska former). För varje kvadratisk form $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ finns det en bas $\underline{b} = (b_1,\dots,b_n)$ i $\mathbb{R}^n$ så att

$$q(x) = y_1^2 + \dots + y_\ell^2 - y_{\ell+1}^2 - \dots - y_{\ell+m}^2$$

gäller för alla $x = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i \in \mathbb{R}^n$. Härvid är talen ℓ och m entydigt bestämda av q.

Koefficientföljden $\underbrace{1,\dots,1}_{\ell},\underbrace{-1,\dots,-1}_{m},\underbrace{0,\dots,0}_{n-\ell-m}$ kallas för q:s signatur.

Bevis (skiss). q bestämmer $A = A^T$ så att $q(x) = x^T A x \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Till A finns S och D som i Sats 2. Nu duger basen

$$\underline{b} = (b_1,\dots,b_n) = (S_{\cdot 1},\dots,S_{\cdot n}).$$

Detaljerna lämnas som övning. $\square$

Ex. 4 Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $q(x) = x^T A x$, och $Y: q(x) = 1$. (Jfr. Ex. 2 och Ex. 3.)

(a) Finn A:s tröghetsform D.

(b) Finn q:s signatur.

(c) Bestäm Y:s typ.

Lösning. (a)

$$-\tfrac{2}{3} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \approx -\tfrac{4}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 4 & -\frac{2}{3} & 3 \end{pmatrix} \approx -\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$-\tfrac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad -\tfrac{4}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = D = A\text{:s tröghetsform}$$

$$-\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ccc} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & & \\ & -\frac{2}{\sqrt{3}} & \\ & & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(b) q:s signatur $=$ A:s signatur $= (1, -1, -1)$

(c) Enligt Sats 3 och (b) finns det en bas $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\mathbb{R}^3$ så att

$$q(x) = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 \quad \forall\, x = \sum_{i=1}^{3} y_i b_i .$$

En geometrisk tolkning lik den i Ex. 2 visar att $Y: y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 1$ är en tvåmantlad hyperboloid. Obs. dock att $\underline{b}$ inte är en on-bas! Vi kan ex.vis inte dra slutsatsen att Y är en rotationshyperboloid.