F15 **Allmänna linjära avbildningar**

Kom ihåg (jfr. F6) att en avbildning $f: V \to W$ mellan vektorrum V och W kallas linjär om

(L1) $f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \forall u,v \in V$ (Additivitet)

(L2) $f(cv) = c f(v) \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall v \in V$ (Homogenitet)

I F6 studerade vi linjära avbildningar $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och insåg att $f(x) = Ax \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, då $A = [f] = \left(f(e_1) \middle| \dots \middle| f(e_n)\right)$ är f:s matris.

Nu släpper vi kravet $V = \mathbb{R}^n$ och $W = \mathbb{R}^m$ och studerar linjära avbildningar $f: V \to W$ mellan allmänna vektorrum V och W. Vi kommer att inse att även dessa beskrivs med hjälp av en matris, nämligen

$$\boxed{A = [f]_{\underline{b}\,\underline{a}} = \left([f(a_1)]_{\underline{b}} \middle| \dots \middle| [f(a_n)]_{\underline{b}}\right) \in \mathbb{R}^{m\times n}}$$

då $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ är en bas i V och $\underline{b} = (b_1, \dots, b_m)$ är en bas i W. Denna matris $A = [f]_{\underline{b}\,\underline{a}}$ kallas för f:s matris i baserna $\underline{a}$ och $\underline{b}$.

Ex. 1 (a) Visa att deriveringsavbildningen $d: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1$, $d(p) = p'$ är linjär.

(b) Ange d:s matris $A = [d]_{\underline{b}\,\underline{a}}$ i baserna $\underline{a} = (1, X, X^2)$ och $\underline{b} = (1, X)$.

(c) Verifiera att $[d(p)]_{\underline{b}} = [d]_{\underline{b}\,\underline{a}} [p]_{\underline{a}}$ gäller för alla $p \in \mathcal{P}_2$.

Lösning. (a)
$$d(p+q) = (p+q)' = p' + q'$$
$$d(cp) = (cp)' = cp'$$

(b)
$$A = [d]_{\underline{b}\,\underline{a}} = \left([d(1)]_{\underline{b}} \middle| [d(X)]_{\underline{b}} \middle| [d(X^2)]_{\underline{b}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$ då

$$d(1) = 1' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot X$$
$$d(X) = X' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot X$$
$$d(X^2) = (X^2)' = 2X = 0 \cdot 1 + 2 \cdot X$$

(c) För alla $p = c_0 1 + c_1 X + c_2 X^2 \in \mathcal{P}_2$ gäller å ena sidan

$d(p) = p' = c_1 1 + 2c_2 X$ och därmed $[d(p)]_{\underline{b}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_2 \end{pmatrix}$, och å andra sidan

$$[d]_{\underline{b}\,\underline{a}} [p]_{\underline{a}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_2 \end{pmatrix} = [d(p)]_{\underline{b}} . \qquad \square$$

Tolkning. Givet $p \in \mathcal{P}_2$, så kan vi beräkna $d(p) \in \mathcal{P}_1$ på två sätt.

1. Beräkna $d(p) = p'$ genom att derivera p. (Analys)

2. Sätt $A = [d]_{\underline{b}\,\underline{a}}$ och $x = [p]_{\underline{a}}$ och beräkna matrisprodukten $y = Ax$. (Algebra)

Enligt Ex. 1 (c) är $[d(p)]_{\underline{b}} = y$, alltså $d(p) = y_1 1 + y_2 X$.

Principen vilken vi ser i Ex. 1 gäller i stor allmänhet, och leder då till följande

Sats 1. Låt $f : V \to W$ vara en linjär avbildning. Låt $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ och $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ vara baser i V och W. Då gäller för alla $v \in V$ att

$$\boxed{[f(v)]_{\underline{b}} = [f]_{\underline{b}\,\underline{a}} [v]_{\underline{a}}}$$

Tolkning. Sätt $A = [f]_{\underline{b}\,\underline{a}}$ och $x = [v]_{\underline{a}}$ och beräkna matrisprodukten $y = Ax$.

Enligt Sats 1 är då $[f(v)]_{\underline{b}} = y$, alltså $f(v) = y_1 b_1 + \ldots + y_m b_m$.

Schematiskt kan Sats 1 uttryckas som ett "kommutativt diagram":

$$\begin{tikzcd}
f(v) \arrow[ddd, mapsto] & & & v \arrow[lll, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] \\
& W \arrow[d, "{[\,]_{\underline{b}}}"'] & V \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "{[\,]_{\underline{a}}}"] & \\
& \mathbb{R}^m & \mathbb{R}^n \arrow[l, "f_A"] & \\
Ax & & & x \arrow[lll, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Tolkning. All information om den givna linjära avbildningen $f : V \to W$ mellan allmänna vektorrum V och W (övre plan i diagrammet) finns bevarad i den linjära avbildningen $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mellan kolonnrummen $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{R}^m$ (nedre plan i diagrammet). Sambandet mellan f och f_A förmedlas av baser i V och W (övergång från vektorer till koordinatkolonner).

Ex. 2 (a) Visa att utvärderingsavbildningen $f : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$, $f(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$ är linjär.

(b) Ange f:s matris $A = [f]_{\underline{e},\underline{X}}$ i standardbaserna $\underline{X} = (1, X, X^2)$ och $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$.

(c) Visa att för varje $y \in \mathbb{R}^3$ finns det precis ett $p \in \mathcal{P}_2$ med $f(p) = y$. (Tolkning!)

Lösning. (a) $$f(p+q) = \begin{pmatrix} (p+q)(0) \\ (p+q)(1) \\ (p+q)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(0) + q(0) \\ p(1) + q(1) \\ p(2) + q(2) \end{pmatrix} = f(p) + f(q)$$

$$f(cp) = \begin{pmatrix} (cp)(0) \\ (cp)(1) \\ (cp)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,p(0) \\ c\,p(1) \\ c\,p(2) \end{pmatrix} = c\,f(p)$$

(b) $$A = [f]_{\underline{e}\underline{X}} = \left([f(1)]_{\underline{e}} \,\middle|\, [f(X)]_{\underline{e}} \,\middle|\, [f(X^2)]_{\underline{e}} \right) = \left(f(1) \,\middle|\, f(X) \,\middle|\, f(X^2) \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(c) Enligt Sats 1 gäller för alla $p \in \mathcal{P}_2$ att

$$f(p) = [f(p)]_{\underline{e}} = [f]_{\underline{e}\underline{X}} [p]_{\underline{X}} = A[p]_{\underline{X}} .$$

Obs. att A är inverterbar, då $\det(A) = 2$. Därmed är för alla $y \in \mathbb{R}^3$

$$f(p) = y \iff A[p]_{\underline{X}} = y$$
$$\iff [p]_{\underline{X}} = A^{-1}y .$$

För varje $y \in \mathbb{R}^3$ ska vi visa existensen och entydigheten av en lösning p till ekvationen $f(p) = y$.

Existens. Givet y, sätt $a = A^{-1}y$ och $p = a_1 1 + a_2 X + a_3 X^2$. Då är

$$[p]_{\underline{X}} = a = A^{-1}y \Rightarrow f(p) = y .$$

Entydighet. Om $p, q \in \mathcal{P}_2$ uppfyller $f(p) = y = f(q)$, då är

$$[p]_{\underline{X}} = A^{-1}y = [q]_{\underline{X}} \Rightarrow p = q . \qquad \square$$

I samspelet mellan linjära avbildningar och matriser korresponderar sammansättning av linjära avbildningar med matrismultiplikation. Närmare bestämt gäller

Sats 2. Låt $f: V \to W$ och $g: W \to X$ vara linjära avbildningar. Låt $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vara baser i V, W, X. Då är

$$\boxed{[gf]_{\underline{c}\underline{a}} = [g]_{\underline{c}\underline{b}} [f]_{\underline{b}\underline{a}}}$$

Några till synes "fåniga" specialfall till Sats 2 visar sig vara särskilt viktiga.

Viktiga specialfall till Sats 2.

1. För varje vektorrum V är den identiska avbildningen $\mathbb{1} : V \to V$, $\mathbb{1}(v) = v$ linjär, då

$$\mathbb{1}(v+w) = v+w = \mathbb{1}(v) + \mathbb{1}(w)$$
$$\mathbb{1}(cv) = cv = c(\mathbb{1}v)$$

2. Om $\underline{a}, \underline{b}$ är två baser i V, då kallas

$$\boxed{T_{\underline{b}\,\underline{a}} := [\mathbb{1}]_{\underline{b}\,\underline{a}} = \left([a_1]_{\underline{b}} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, [a_n]_{\underline{b}} \right)}$$

för basbytesmatrisen från $\underline{a}$ till $\underline{b}$. I specialfallet $V = \mathbb{R}^n$ återfås basbytesmatrisen från F4.

3. Obs. att $T_{\underline{a}\,\underline{a}} = \left([a_1]_{\underline{a}} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, [a_n]_{\underline{a}} \right) = I$, då $[a_j]_{\underline{a}} = e_j \quad \forall j \in \underline{n}$.

4. Basbytesmatrisen $T_{\underline{b}\,\underline{a}}$ är alltid inverterbar, och $\boxed{T_{\underline{b}\,\underline{a}}^{-1} = T_{\underline{a}\,\underline{b}}}$.

Bevis. $T_{\underline{a}\,\underline{b}} T_{\underline{b}\,\underline{a}} = [\mathbb{1}]_{\underline{a}\,\underline{b}} [\mathbb{1}]_{\underline{b}\,\underline{a}} \underset{\text{Sats 2}}{=} [\mathbb{1}]_{\underline{a}\,\underline{a}} = T_{\underline{a}\,\underline{a}} = I$. $\square$

5. Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär operator. Låt $\underline{e}$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^n$ och $\underline{b}$ någon bas i $\mathbb{R}^n$. Följande kort notation och terminologi är vedertagen.

$$[f]_{\underline{b}} := [f]_{\underline{b}\,\underline{b}} = f\text{:s matris i } \underline{b}$$

$$[f] := [f]_{\underline{e}} = [f]_{\underline{e}\,\underline{e}} = f\text{:s matris (i standardbasen)}$$

Därmed gäller

Sats 3. $\boxed{[f] = T[f]_{\underline{b}}T^{-1}}$, då $\boxed{T = T_{\underline{e}\underline{b}} = (b_1 | \dots | b_n)}$.

Bevis. $[f] = [f]_{\underline{e}\underline{e}} = [\mathbb{1} f \mathbb{1}]_{\underline{e}\underline{e}} \underset{\text{Sats 2}}{=} [\mathbb{1}]_{\underline{e}\underline{b}} [f]_{\underline{b}\underline{b}} [\mathbb{1}]_{\underline{b}\underline{e}}$

$$= T_{\underline{e}\underline{b}} [f]_{\underline{b}} T_{\underline{b}\underline{e}}$$

$$= T[f]_{\underline{b}} T^{-1} \qquad \square$$

Med hjälp av Sats 3 kan vi beräkna matrisen av många viktiga operatorer!

Ex. 3 Operatorn f på $\mathbb{R}^3$ ges geometriskt som projektion på planet $P: x - 2y - z = 0$ parallellt med linjen $L = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$. Finn f:s matris i standardbasen.

Lösning. a) Välj en bas $\underline{b}$ i $\mathbb{R}^3$ som är väl anpassad till f. (Här kan vi även välja $\underline{b}$ så att den består av idel egenvektorer till f.) Vi väljer

$$b_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\quad b_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad b_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Då är b_1, b_2 en bas i P och b_3 en bas i L. Vi får

$$f(b_1) = b_1,\quad f(b_2) = b_2,\quad f(b_3) = 0.$$

Därmed blir

$$[f]_{\underline{b}} = \left([f(b_1)]_{\underline{b}} \middle| [f(b_2)]_{\underline{b}} \middle| [f(b_3)]_{\underline{b}}\right) = \left([b_1]_{\underline{b}} \middle| [b_2]_{\underline{b}} \middle| [0]_{\underline{b}}\right) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

b) Tillämpa Sats 3.

$$T = T_{\underline{e}\underline{b}} = \begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&1\\0&1&3\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&-6&1\\-1&2&1\end{pmatrix},$$

alltså enligt Sats 3

$$[f] = T[f]_{\underline{b}}T^{-1} = \begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&1\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&-6&1\\-1&2&1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&1\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&-6&1\\0&0&0\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}5&-2&-1\\1&2&-1\\3&-6&1\end{pmatrix}$$

<u>Svar.</u> $[f] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}5&-2&-1\\1&2&-1\\3&-6&1\end{pmatrix}$

<u>Ex. 4</u> (Jfr. F12 Ex. 5) <u>Operatorn f ges geometriskt som spegling i planet</u> $P: x+y+z=0$. <u>Finn f:s matris i standardbasen.</u>

<u>Lösning.</u> Vi väljer $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\underline{b}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Då är $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ en bas i P och $\underline{b}_3 \perp P$. Vi får alltså

$$f(\underline{b}_1) = \underline{b}_1, \quad f(\underline{b}_2) = \underline{b}_2, \quad f(\underline{b}_3) = -\underline{b}_3.$$

Därmed blir

$$[f]_{\underline{b}} = \left([f(\underline{b}_1)]_{\underline{b}} \,\middle|\, [f(\underline{b}_2)]_{\underline{b}} \,\middle|\, [f(\underline{b}_3)]_{\underline{b}}\right) = \left([\underline{b}_1]_{\underline{b}} \,\middle|\, [\underline{b}_2]_{\underline{b}} \,\middle|\, [-\underline{b}_3]_{\underline{b}}\right) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

och

$$T = T_{\underline{e}\underline{b}} = \begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-1&-1&2\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

Enligt Sats 3 är då

$$[f] = T[f]_{\underline{b}}T^{-1} = \begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-1&-1&2\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-1&-1&2\\1&1&1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix} \quad \leftarrow \underline{\text{Svar.}}$$