F16

Egenskaper av linjära avbildningar

För varje linjär avbildning $f : V \to W$ definierar man dess kärna (= kernel) enligt

$$\boxed{\ker(f) = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}} \,,$$

och dess bild (= image, range) enligt

$$\boxed{\operatorname{im}(f) = \{ w \in W \mid f(v) = w \text{ har en lösning } v \}} \,.$$

Delmängderna $\ker(f) \subset V$ och $\operatorname{im}(f) \subset W$ är faktiskt delrum.

Låt oss verifiera delrumsaxiomen för $\ker(f) \subset V$.

(DR1) $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow 0 \in \ker(f)$.

(DR2) $u, v \in \ker(f) \Rightarrow f(u+v) = f(u) + f(v) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow u + v \in \ker(f)$.

(DR3) $c \in \mathbb{R},\ v \in \ker(f) \Rightarrow f(cv) = cf(v) = c0 = 0 \Rightarrow cv \in \ker(f)$. $\square$

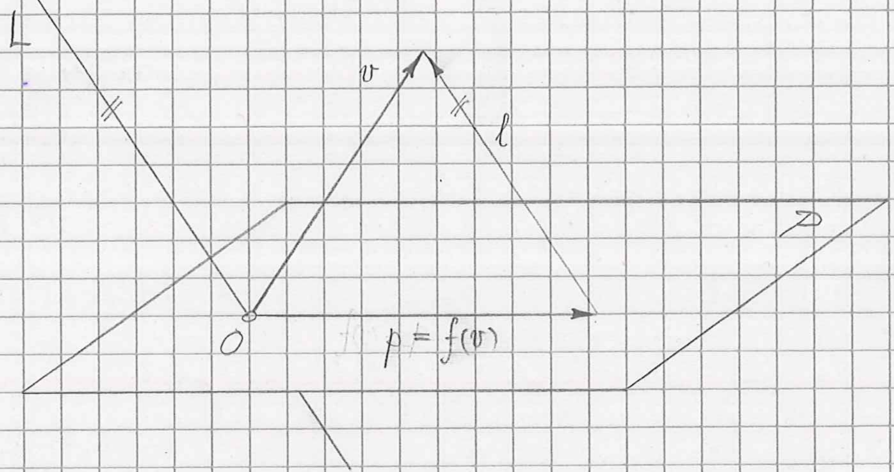
Verifikationen av delrumsaxiomen för $\operatorname{im}(f) \subset W$ lämnas som övning.

Varje linjär avbildning $f : V \to W$ bestämmer alltså två delrum $\ker(f) \subset V$ och $\operatorname{im}(f) \subset W$, och dessa innehåller viktig information om f, då ju $\ker(f)$ är just den del i V på vilken f försvinner, och $\operatorname{im}(f)$ är just den del i W vilken uppnås av f.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad f \quad} & W \\ \cup & & \cup \\ \ker(f) & & \operatorname{im}(f) \end{array}$$

Hur kan man "se", eller "få grepp om" dessa delrum?

Ex. 1 Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara projektionen på ett plan P genom origo, parallellt med linjen L genom origo. Då är $\ker(f) = L$ och $\mathrm{im}(f) = P$.



Detta "ser man" väl? Om inte, så kan man också bevisa påståendet.

Bevis. En allmän vektor $v \in \mathbb{R}^3$ skrivs på formen $v = p + l$, med entydigt bestämda summander $p \in P$ och $l \in L$. Då är $p = f(v)$ (se figur).

$\ker(f) \subset L$: Om $v \in \ker(f)$ och $v = p + l$, då är $p = f(v) = 0$, alltså $v = 0 + l = l \in L$.

$L \subset \ker(f)$: Varje $l \in L$ kan skrivas $l = 0 + l$ med $0 \in P$ och $l \in L$. Alltså är $f(l) = 0$, dvs. $l \in \ker(f)$.

$\mathrm{im}(f) \subset P$: $w \in \mathrm{im}(f)$ betyder att $f(v) = w$ för något $v \in \mathbb{R}^3$, alltså är $w \in P$.

$P \subset \mathrm{im}(f)$: Varje $p \in P$ kan skrivas $p = p + 0$ med $p \in P$ och $0 \in L$. Alltså är $f(p) = p$, dvs. $p \in \mathrm{im}(f)$.

$\square$

Ex. 2 Som bekant bestämmer varje matris $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en linjär avbildning $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f_A(x) = Ax$.
Då råder sambandet $\boxed{\ker(f_A) = N(A)}$ och $\boxed{\operatorname{im}(f_A) = K(A).}$

Bevis. $x \in \ker(f_A) \Leftrightarrow f_A(x) = 0 \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x \in N(A)$.

$$
\begin{aligned}
y \in \operatorname{im}(f_A) &\Leftrightarrow f_A(x) = y && \text{för något } x \in \mathbb{R}^n \\
&\Leftrightarrow Ax = y && \text{för något } x \in \mathbb{R}^n \\
&\Leftrightarrow x_1 A_{\bullet 1} + \dots + x_n A_{\bullet n} = y && \text{för något } x \in \mathbb{R}^n \\
&\Leftrightarrow y \in \operatorname{span}\{A_{\bullet 1}, \dots, A_{\bullet n}\} = K(A).
\end{aligned}
$$
□

Ex. 3 Projektionen f på planet P: $x - 2y - z = 0$ parallellt med linjen $L = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$
har matris $A = [f] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}5 & -2 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & -6 & 1\end{pmatrix}$, se F15 Ex. 3. Enligt Ex. 1 är
$\ker(f) = L$ och $\operatorname{im}(f) = P$ (geometrisk tolkning). Enligt Ex. 2 är
$\ker(f) = N(A)$ och $\operatorname{im}(f) = K(A)$ (algebraisk tolkning). Alltså är $N(A) = L$
och $K(A) = P$. Verifiera detta!

Lösning. $A \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 5 & -2 & -1\\ 3 & -6 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -12 & 4\\ 0 & -12 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1/3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1/3\\ 0 & 1 & -1/3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

(-3) (-5)

Från trappstegsmatrisen läser vi av att $N(A) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right\} = L$, och

$K(A) = \operatorname{span}\{A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}\} = \operatorname{span}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}}_{b_2}\right\} = P$, då b_1, b_2 är linjärt oberoende och ligger i P. □

Det finns ett enkelt samband mellan dimensionerna av delrummen $\ker(f)$ och $\mathrm{im}(f)$, som bygger på

Dimensionssatsen för matriser. För varje matris $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gäller (se F5)

$$\boxed{\dim(N(A)) + \mathrm{rang}(A) = n} \tag{1}$$

Vidare är
$$\mathrm{rang}(A) = \dim(R(A)) = \dim(K(A)) \tag{2}$$

Detta hade vi i F5. Nu vet enligt Ex. 2 dessutom att

$$N(A) = \ker(f_A) \quad \text{och} \quad K(A) = \mathrm{im}(f_A) . \tag{3}$$

Identiteterna (1)-(3) leder fram till

Dimensionssatsen för linjära avbildningar mellan kolonnrum. För varje linjär avbildning $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f_A(x) = Ax$ gäller

$$\boxed{\dim(\ker(f_A)) + \dim(\mathrm{im}(f_A)) = \dim(\mathbb{R}^n)}$$

Allmänna linjära avbildningar $f: V \to W$ hänger nära ihop med linjära avbildningar $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, då $A = [f]_{\underline{b}\,\underline{a}}$. Genom att systematiskt utnyttja formeln

$$[f(v)]_{\underline{b}} = [f]_{\underline{b}\,\underline{a}} [v]_{\underline{a}}$$

kan man även visa

Dimensionssatsen för allmänna linjära avbildningar. För varje linjär avbildning $f: V \to W$ gäller

$$\boxed{\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(V)}$$

Vi kommer nu in på tre speciella typer av linjära avbildningar. Två av dem definieras så här.

En linjär avbildning $f: V \to W$ kallas $\begin{cases} \text{injektiv} \\ \text{surjektiv} \end{cases}$ om ekvationen $f(v) = w$ har $\begin{cases} \text{högst en} \\ \text{minst en} \end{cases}$ lösning $v \in V$ för varje $w \in W$.

För varje $f: V \to W$ är följande uttryckssät ekvivalenta.

(i) f är injektiv (i boken: one-to-one).

(ii) $v \neq v' \Rightarrow f(v) \neq f(v')$.

(iii) $v = v' \Leftarrow f(v) = f(v')$.

Ex. 4 Projektionen $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ på ett plan P genom origo parallellt med en linje L genom origo är varken injektiv eller surjektiv.

Bevis. För varje $w \in P$ har ekvationen $f(v) = w$ oändligt många lösningar $v = w + l$, med $l \in L$. Alltså är f ej injektiv.

För varje $w \notin P$ har ekvationen $f(v) = w$ ingen lösning $v \in V$. Alltså är f ej surjektiv. □

Ex. 5 Rotationen $r: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kring en axel L genom origo med vinkel α är både injektiv och surjektiv.

Bevis. Injektiv: $r(v) = r(v') \Rightarrow v = r^{-1}r(v) = r^{-1}r(v') = v'$.

Surjektiv: $r(v) = w$ löses av $v = r^{-1}(w)$ □

Ex. 6 Med $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ är $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ injektiv, men ej surjektiv.

Bevis. Injektiv: $Ax = Ay \Rightarrow A(x-y) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$.

Ej surjektiv: $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ har ingen lösning x. □

Ex. 7 Med $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ är $f_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ej injektiv, men surjektiv.

Bevis. Ej injektiv: $Bx = 0$ har oändligt många lösningar $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Surjektiv: $Bx = y$ löses av $x = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, ex.vis. □

Injektivitet och surjektivitet hos en linjär avbildning $f : V \to W$ kan enkelt karakteriseras med hjälp av $\ker(f)$ och $\operatorname{im}(f)$.

Sats 1. En linjär avbildning $f : V \to W$ är $\begin{cases} \text{injektiv omm } \ker(f) = \{0\} \\ \text{surjektiv omm } \operatorname{im}(f) = W \end{cases}$

Bevis. Alltid gäller $f(0) = 0$, alltså $\ker(f) \supset \{0\}$.
Antag att f är injektiv. $v \in \ker(f) \Rightarrow f(v) = 0 = f(0) \Rightarrow v = 0$, alltså $\ker(f) = \{0\}$.
Antag omvänt att $\ker(f) = \{0\}$. $f(v) = f(v') \Rightarrow f(v - v') = f(v) - f(v') = 0$
$\Rightarrow v - v' \in \ker(f) = \{0\} \Rightarrow v = v'$.

Ekvivalensen surjektiv omm $\operatorname{im}(f) = W$ framgår direkt av definitionen av surjektivitet och $\operatorname{im}(f)$.

□

Tillsammans med dimensionssatsen alstrar Sats 1 följande

Sats 2. Låt $f: V \to W$ vara en linjär avbildning, och $\dim(V) = \dim(W) < \infty$. Då är f injektiv omm f är surjektiv.

Obs. att Sats 2 gäller i synnerhet för varje linjär operator på V med $\dim(V) < \infty$. Jfr. Ex. 4 och Ex. 5 !

Bevis. Med $\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(V)$ (*) gäller att

$$
\begin{array}{ccccc}
f \text{ är injektiv} & \underset{\text{Sats 1}}{\Leftrightarrow} & \ker(f) = \{0\} & \Leftrightarrow & \dim(\ker(f)) = 0 \\
 & & & & \Updownarrow (*) \\
f \text{ är surjektiv} & \underset{\text{Sats 1}}{\Leftrightarrow} & \operatorname{im}(f) = W & \Leftrightarrow & \dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(W)
\end{array}
$$

$\square$

Nu kommer vi in på den tredje speciella typen av linjära avbildningar:

En linjär avbildning $f: V \to W$ kallas bijektiv om ekvationen $f(v) = w$ har exakt en lösning $v \in V$ för varje $w \in W$.

Sats 3. För varje linjär avbildning $f: V \to W$ är de följande påståendena ekvivalenta.

(i) f är bijektiv.

(ii) f är både injektiv och surjektiv.

(iii) f är inverterbar.

(iv) $[f]_{\underline{b}\underline{a}}$ är inverterbar för alla baser $\underline{a}$ i V och $\underline{b}$ i W.

Bevis (skiss). (i) $\Leftrightarrow$ (ii) framgår direkt av själva begreppen bijektiv, injektiv och surjektiv.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Definiera $g: W \to V$ genom $g(w)$ = den entydigt bestämda vektorn v med $f(v) = w$.
Då gäller $gf = \mathbb{1}_V$ och $fg = \mathbb{1}_W$, dvs. $g = f^{-1}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) är samma resonemang som i Ex. 5 (rotation).

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $[f^{-1}]_{\underline{a}\underline{b}} [f]_{\underline{b}\underline{a}} = [f^{-1}f]_{\underline{a}\underline{a}} = [\mathbb{1}_V]_{\underline{a}\underline{a}} = I$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) För varje $w \in W$ har matrisekvationen $[f]_{\underline{b}\underline{a}} x = [w]_{\underline{b}}$

den entydiga lösningen $x = [f]^{-1}_{\underline{b}\underline{a}} [w]_{\underline{b}}$.

Alltså har vektorekvationen $f(v) = w$ den entydiga lösningen $v = \sum x_i a_i$. □

Exempel på bijektiva linjära operatorer $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ utgörs av alla rotationer (Ex. 5) och alla speglingar. Mer allmänt säger Sats 3 att varje inverterbar matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ger upphov till en bijektiv operator $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Intressant är också

Ex. 8 För varje vektorrum V med bas $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ är koordinatavbildningen

$$[\;]_{\underline{a}} : V \to \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto [v]_{\underline{a}}$$ linjär och bijektiv.

Beviset är en nyttig övning.

Sats 4. Om $f: V \to W$ är linjär och bijektiv, då är $\dim(V) = \dim(W)$.

Bevisidé. Om $(a_1, \ldots, a_n)$ är en bas i V, då är $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$ en bas i W.
Detaljerna lämnas som övning.