F17 **System av linjära differentialekvationer**

Att lösa diffekvationen

(1) $$y' = ay \qquad (a \text{ en reell konstant})$$

betyder att finna alla differentierbara funktioner $y = f(x)$ av en reell variabel x som uppfyller (1). En lösning till (1) ges av exponentialfunktionen

$$y = e^{ax},$$

då $y' = ae^{ax} = ay$. En hel skara av lösningar ges av funktionerna

$$y = ce^{ax} \qquad (c \text{ en reell konstant}),$$

då $y' = cae^{ax} = ace^{ax} = ay$. Denna skara beskriver faktiskt alla lösningar till (1)!

Sats 1. Om $y = f(x)$ löser $y' = ay$, då är $f(x) = ce^{ax}$ för något $c \in \mathbb{R}$.

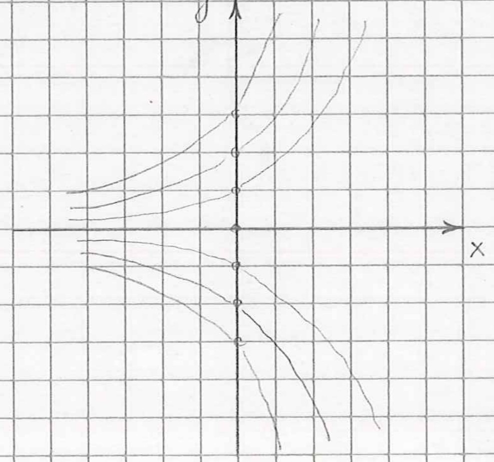
Bevis.
$$\frac{d}{dx}\left(f(x)e^{-ax}\right) = f'(x)e^{-ax} + f(x)(-a)e^{-ax}$$
$$= af(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax} = 0$$
$$\Rightarrow f(x)e^{-ax} = c \quad \Rightarrow f(x) = ce^{ax}. \qquad \square$$

Sammanfattningsvis är alltså

$$y = ce^{ax}, \quad c \in \mathbb{R}$$

den allmänna lösningen till

$$y' = ay.$$



Ex. 1 Diffekvationen $y' = 3y$ har den allmänna lösningen $y = ce^{3x}$, $c \in \mathbb{R}$.

Att lösa diffekvationssystemet

$$(2) \quad \begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

betyder att finna alla par av differentierbara funktioner $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ som uppfyller (2).
I specialfallet $b = c = 0$, dvs. A en diagonalmatris, blir (2) lika med

$$(2)_D \quad \begin{cases} y_1' = ay_1 \\ y_2' = \qquad dy_2 \end{cases},$$

vilket är ett system av två diffekvationer som kan lösas var för sig enligt (1). Den allmänna lösningen till $(2)_D$ blir då

$$\begin{cases} y_1 = c_1 e^{ax} \\ y_2 = c_2 e^{dx} \end{cases}, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Kan man lösa diffekvationssystemet (2) även ifall A inte är diagonalmatris? Svaret är ja, om A är diagonaliserbar!

Ex. 2 Lös systemet

$$(2) \quad \begin{cases} y_1' = 2y_1 - 3y_2 \\ y_2' = -4y_1 + y_2 \end{cases}$$

Lösning. Systemets koefficientmatris är $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Diagonalisera A, dvs. finn T inverterbar och D diagonal så att $T^{-1}AT = D$.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 3 \\ 4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1) - 12 = \lambda^2 - 3\lambda - 10$$

har rötterna $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \dfrac{3 \pm 7}{2}$, alltså $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -2$.

$$E(5) = N(5I - A) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$5I - A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E(-2) = N(-2I - A) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$$

$$-2I - A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ är en bas i $\mathbb{R}^2$ med $Ab_1 = 5b_1$, $Ab_2 = -2b_2$.

Alltså uppfyller $T = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ matrisekvationen $T^{-1}AT = D$.

b) Substituera $\boxed{y = Tz}$ och $\boxed{y' = Tz'}$, och tillämpa a).

Det givna systemet kan skrivas som matrisekvation

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}}_{y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{y},$$

eller kort

$$(2) \qquad y' = Ay.$$

Med $y = Tz$ och $y' = Tz'$ gäller att

$$
\begin{aligned}
y \text{ löser } (2) &\iff y' = Ay \\
&\iff Tz' = ATz \\
&\iff T^{-1}Tz' = T^{-1}ATz \\
&\iff z' = Dz \qquad (2)_D \\
&\iff z \text{ löser } (2)_D
\end{aligned}
$$

Systemet $(2)_D$

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5z_1 \\ -2z_2 \end{pmatrix}$$

har den allmänna lösningen

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{5x} \\ c_2 e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Alltså har systemet (2) den allmänna lösningen

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_1 + 3z_2 \\ z_1 + 4z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 e^{5x} + 3c_2 e^{-2x} \\ c_1 e^{5x} + 4c_2 e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Svar. Den allmänna lösningen till det givna systemet (2) är

$$\begin{cases} y_1 = -c_1 e^{5x} + 3c_2 e^{-2x} \\ y_2 = c_1 e^{5x} + 4c_2 e^{-2x} \end{cases}, \quad \text{där } (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$$

Sammanfattning och

Generalisering. Varje kvadratisk system av linjära diffekvationer av första ordningen

$$(3)\quad \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

kan skrivas som matrisekvation

$$y' = Ay .$$

Om det finns en inverterbar matris T och en diagonalmatris $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ så att

$T^{-1}AT = D$, dvs. om A är diagonaliserbar, då har systemet

$$(3)_D \qquad z' = Dz$$

den allmänna lösningen

$$\begin{cases} z_1 = c_1 e^{d_1 x} \\ \vdots \qquad \vdots \\ z_n = c_n e^{d_n x} \end{cases}, \quad \text{där } (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n ,$$

och det givna systemet (3) har den allmänna lösningen

$$\boxed{y = Tz} .$$

Två varianter till denna allmänna mall bör anmärkas. Den ena varianten avser lösningen av ett system (3) med begynnelsevillkor som specificerar värdena $y_1(0), \dots, y_n(0)$. Begynnelsevillkoren medför att en partikulär lösning plockas utav den allmänna lösningen. Den andra varianten avser möjligheten att (eventuellt) kunna lösa en linjär diffekvation av högre ordning genom att översätta den till ett system (3).

Ex. 3 Lös systemet $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 3y_2 \\ y_2' = -4y_1 + y_2 \end{cases}$ med begynnelsevillkoren $y_1(0) = 1$ och $y_2(0) = 2$.

Lösning. Enligt Ex. 2 har systemet den allmänna lösningen

$$\begin{cases} y_1 = -c_1 e^{5x} + 3c_2 e^{-2x} \\ y_2 = c_1 e^{5x} + 4c_2 e^{-2x} \end{cases}, \quad \text{där } (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Denna uppfyller begynnelsevillkoren omm

$$\begin{cases} -c_1 + 3c_2 = 1 \\ c_1 + 4c_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}.$$

Svar. $\begin{cases} y_1 = -\frac{2}{7} e^{5x} + \frac{9}{7} e^{-2x} \\ y_2 = \frac{2}{7} e^{5x} + \frac{12}{7} e^{-2x} \end{cases}$

Ex. 4 Lös $y'' - 7y' + 6y = 0$. (1)

Lösning. Om y löser (1), då löser $\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{cases}$ systemet $\begin{cases} y_1' = y' = y_2 \\ y_2' = y'' = 7y' - 6y = -6y_1 + 7y_2 \end{cases}$

Om $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ löser $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -6y_1 + 7y_2 \end{cases}$ (2), då löser $y = y_1$ ekvationen

$$y''-7y'+6y \overset{y=y_1}{=} y_1''-7y_1'+6y_1$$

$$\overset{y_1'=y_2}{=} y_2'-7y_2+6y_1 \quad = 0$$

Alltså är (1) och (2) ekvivalenta. Vi löser (2). Systemet (2) kan skrivas som matrisekvation

$$y' = Ay \quad , \quad \text{med} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 6 & \lambda-7 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-7)+6 = \lambda^2-7\lambda+6$$

har rötterna

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7\pm 5}{2} \quad , \quad \text{alltså} \quad \lambda_1 = 1 \; , \; \lambda_2 = 6 \; .$$

$$E(1) = N(I-A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$I-A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E(6) = N(6I-A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}\right\}$$

$$6I-A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ är en bas i $\mathbb{R}^2$ med $Ab_1 = b_1$, $Ab_2 = 6b_2$.

Alltså uppfyller $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ matrisekvationen $T^{-1}AT = D$.

Systemet $(2)_D$ $\quad z' = Dz \quad$ har den allmänna lösningen $\begin{cases} z_1 = c_1 e^{x} \\ z_2 = c_2 e^{6x} \end{cases}$,

och systemet (2) har därmed den allmänna lösningen $\quad y = Tz$, dvs.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 e^{x} \\ c_2 e^{6x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{x} + c_2 e^{6x} \\ c_1 e^{x} + 6 c_2 e^{6x} \end{pmatrix}, \quad \text{där } (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 .$$

<u>Svar.</u> <u>Den allmänna lösningen till den givna diffekvationen (1)</u> <u>är</u>

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{6x}, \quad \underline{\text{där}}\ (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 . \qquad \text{(Facit i boken är fel.)}$$

<u>Ex. 5</u> <u>Lös</u> $y'' - 7y' + 6y = 0$ <u>med begynnelsevillkoren</u> $y(0) = 1$ <u>och</u> $y'(0) = -4$.

<u>Lösning.</u> Enligt Ex. 4 är ekvationens allmänna lösning

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{6x}, \quad \text{där } (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 .$$

Denna uppfyller begynnelsevillkoren omm

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + 6c_2 = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

<u>Svar.</u> $y = 2e^{x} - e^{6x}$.