F2 Linjärt oberoende, bas, koordinater

Varje uppsättning vektorer $v_1, \ldots, v_\ell$ i ett vektorrum V bestämmer en vektorekvation

$$c_1 v_1 + \ldots + c_\ell v_\ell = 0 \qquad (*)$$

vilken alltid har den triviala lösningen $(c_1, \ldots, c_\ell) = (0, \ldots, 0)$. Om $(*)$ endast har den triviala lösningen, då kallas vektorerna $v_1, \ldots, v_\ell$ för linjärt oberoende. Om däremot $(*)$ har någon icketrivial lösning $(c_1, \ldots, c_\ell) \neq (0, \ldots, 0)$, då kallas vektorerna $v_1, \ldots, v_\ell$ för linjärt beroende.

Ex. 1 Är vektorerna $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ linjärt oberoende?

Lösning. Frågan är om vektorekvationen $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$ $(*)$ har endast den triviala lösningen $(c_1, c_2, c_3) = (0,0,0)$. Låt (c_1, c_2, c_3) vara någon lösning till $(*)$. Då är

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 + 3c_3 \\ -c_1 + c_2 + 4c_3 \\ 5c_3 \end{pmatrix},$$

dvs. (c_1, c_2, c_3) löser det linjära ekvationssystemet

$$\left\{\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \\ -c_1 + c_2 + 4c_3 &= 0 \\ 5c_3 &= 0 \end{aligned}\right. \quad \text{①}$$

$$\sim \left\{\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \\ 3c_2 + 7c_3 &= 0 \\ 5c_3 &= 0 \end{aligned}\right.,$$

vilket medför att $(c_1, c_2, c_3) = (0,0,0)$.

Svar. Ja.

Ex. 2 Är vektorerna $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linjärt oberoende?

Lösning. $2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ innebär att ekvationen

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$ har den icketriviala lösningen

$(c_1, c_2, c_3) = (2, -1, -1)$.

Svar. Nej.

I specialfallen $\ell = 1$ och $\ell = 2$ kan vi se direkt om en given uppsättning vektorer $v_1, \dots, v_\ell$ är linjärt oberoende.

$\ell = 1$. En vektor v är linjärt beroende $\Leftrightarrow$ ekvationen $cv = 0$ har en lösning $c \neq 0$

$$\underset{\text{Sats F1}}{\Leftrightarrow} \quad v = 0$$

$\ell = 2$. Två vektorer v_1, v_2 är linjärt beroende $\Leftrightarrow$ ekvationen $c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$ har en icketrivial lösning $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$

$\Leftrightarrow \quad v_1 = -\dfrac{c_2}{c_1} v_2$ eller $v_2 = -\dfrac{c_1}{c_2} v_1$

$\Leftrightarrow \quad v_1, v_2$ är proportionella

Kom ihåg att två vektorer kallas proportionella om en av dem är en skalär multipel av den andra. Specialfallet $\ell = 2$ generaliseras av följande

Sats. En uppsättning vektorer $v_1, \dots, v_\ell$ med $\ell \geq 2$ är linjärt beroende omm någon vektor v_i kan skrivas som en linjärkombination av de övriga $\ell - 1$ vektorer.

En uppsättning vektorer $v_1, \dots, v_\ell$ i ett vektorrum V sägs **spänna upp** (eller **generera**) V om

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_\ell\} = V \quad ,$$

dvs. om vektorekvationen

$$c_1 v_1 + \dots + c_\ell v_\ell = v \qquad (*_v)$$

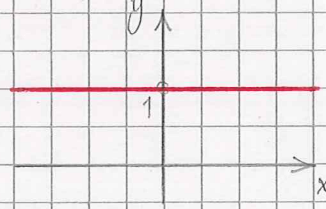
har en lösning $(c_1, \dots, c_\ell)$ för varje $v \in V$.

Ex. 3 I vektorrummet $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$ av alla reellvärda funktioner av en reell variabel finns delrummet

$$\mathcal{P}_2 = \{ p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ , \ a_i \in \mathbb{R} \}$$

av alla polynom av grad högst 2. (Övning: Verifiera att $\mathcal{P}_2 \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ uppfyller (DR1)–(DR3).)
Genom att välja de konstanta koefficienterna a_i på ett specifikt sätt får man ett specifikt polynom i $\mathcal{P}_2$. Ex.vis ger valet $(a_0, a_1, a_2) = (1, 0, 0)$ polynomet

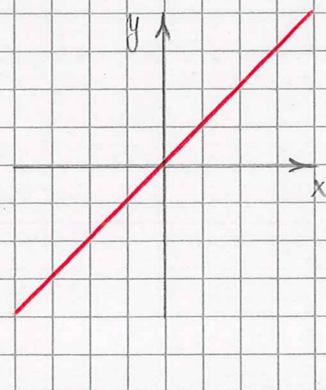
$$1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad 1(x) = 1 + 0x + 0x^2 = 1 \quad ,$$



vilket är den konstanta funktionen med värde 1. Dess graf är

Det andra valet $(a_0, a_1, a_2) = (0, 1, 0)$ ger ett annat polynom

$$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad X(x) = 0 + 1x + 0x^2 = x \quad ,$$

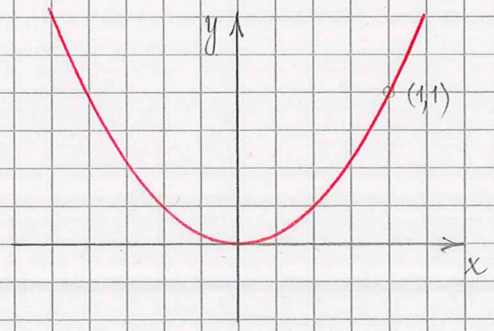


vilket är den identiska funktionen. Dess graf är

Det tredje valet $(a_0, a_1, a_2) = (0, 0, 1)$ ger ett tredje polynom

$$X^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad X^2(x) = 0 + 0x + 1x^2 = x^2 \quad ,$$

vars graf är parabeln



Polynomen $1, X, X^2$ bildar alltså en uppsättning vektorer i vektorrummet $\mathcal{P}_2$.

Spänner $1, X, X^2$ upp $\mathcal{P}_2$?

Frågan är om ekvationen $c_0 1 + c_1 X + c_2 X^2 = p \quad (*_p)$ har en lösning (c_0, c_1, c_2) för varje $p \in \mathcal{P}_2$. Varje $p \in \mathcal{P}_2$ har ju formen $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, för vissa konstanta koefficienter $a_i \in \mathbb{R}$. Med dessa kan vi även bilda polynomet $a_0 1 + a_1 X + a_2 X^2$, vars värde i $x \in \mathbb{R}$ blir

$$
\begin{aligned}
\left(a_0 1 + a_1 X + a_2 X^2\right)(x) &= (a_0 1)(x) + (a_1 X)(x) + (a_2 X^2)(x) \\
&= a_0 \left(1(x)\right) + a_1 \left(X(x)\right) + a_2 \left(X^2(x)\right) \\
&= a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2 \\
&= p(x)
\end{aligned}
$$

Detta innebär att $a_0 1 + a_1 X + a_2 X^2 = p$. Alltså löses $(*_p)$ av (a_0, a_1, a_2). Då detta gäller för varje $p \in \mathcal{P}_2$ är slutsatsen att $\operatorname{span}\{1, X, X^2\} = \mathcal{P}_2$, dvs. $1, X, X^2$ spänner upp $\mathcal{P}_2$.

Svar. Ja

Ex. 3 generaliseras lätt till

Ex. 4 För varje naturligt tal $n \in \mathbb{N}$ är mängden

$$\mathcal{P}_n = \{ p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \; a_i \in \mathbb{R} \}$$

av alla polynom av grad högst n ett delrum i $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. För varje $\nu \in \mathbb{N}$ definieras polynomet

$$X^\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{enligt} \quad X^\nu(x) = x^\nu. \quad \text{Istället för } X^0 \text{ skriver vi } \mathbb{1}.$$

Då gäller för varje $p \in \mathcal{P}_n$ med $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ att

$$a_0 \mathbb{1} + a_1 X + \dots + a_n X^n = p .$$

Alltså är $\operatorname{span}\{\mathbb{1}, X, \dots, X^n\} = \mathcal{P}_n$, dvs. $\mathbb{1}, X, \dots, X^n$ spänner upp $\mathcal{P}_n$.

Definition, sats, och terminologi. En uppsättning vektorer $\underline{v} = (v_1, \dots, v_\ell)$ i ett vektorrum V kallas bas i V om

(B1) $\underline{v}$ är linjärt oberoende och

(B2) $\underline{v}$ spänner upp V.

I detta fall finns det för varje $v \in V$ precis en lösning $(c_1, \dots, c_\ell)$ till ekvationen

$$c_1 v_1 + \dots + c_\ell v_\ell = v \qquad (*_v)$$

Skalärerna c_i kallas för v:s koordinater i basen $\underline{v}$, och ℓ-tippeln $(c_1, \dots, c_\ell)$ kallas för v:s koordinatvektor i basen $\underline{v}$. Notation: $(v)_{\underline{v}} = (c_1, \dots, c_\ell)$.

Ex. 5 Polynomföljden $\underline{X} = (\mathbb{1}, X, \dots, X^n)$ är en bas i $\mathcal{P}_n$. För varje $p \in \mathcal{P}_n$ med $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ är $(p)_{\underline{X}} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$.

Bevis för $n=2$. (B2) $(1, X, X^2)$ spänner upp $\mathcal{P}_2$, enligt Ex. 3.

(B1) $(1, X, X^2)$ är linjärt oberoende. Låt

$$p = c_0 1 + c_1 X + c_2 X^2 = 0$$

vara nollpolynomet. Då gäller för alla $x \in \mathbb{R}$ att

$$\left.\begin{aligned} 0 &= p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \\ 0 &= p'(x) = \quad c_1 + 2c_2 x \\ 0 &= p''(x) = \quad\quad 2c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} 0 &= p(0) = c_0 \\ 0 &= p'(0) = c_1 \\ 0 &= \quad c_2 \end{aligned}\right.$$

Om $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, då gäller enligt Ex. 3 att $p = a_0 1 + a_1 X + a_2 X^2$.

Eftersom $\underline{X}$ är en bas, så betyder detta att $(p)_{\underline{X}} = (a_0, a_1, a_2)$. $\square$.

Ibland skriver man koordinatvektorn $(v)_{\underline{v}} = (c_1, \dots, c_\ell)$ som kolonn, och då använder man hakparentesnotationen

$$[v]_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_\ell \end{pmatrix} = v\text{:s koordinatkolonn i basen } \underline{v} = (v_1, \dots, v_\ell).$$

Ex. 6 Låt $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, och $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Visa att $\underline{v} = (v_1, v_2)$ är en bas i $\mathbb{R}^{2\times 1}$, och finn $[v]_{\underline{v}}$.

Lösning. Med $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ gäller för alla $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ att

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + c_2 \\ c_1 + 2c_2 \end{pmatrix} = Ac .$$

Dessutom är A inverterbar, och $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(B1) $\underline{v}$ är linjärt oberoende. $Ac = c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0 \Rightarrow c = A^{-1} 0 = 0$

$$\Rightarrow (c_1, c_2) = (0,0) .$$

(B2) $\underline{v}$ spänner upp $\mathbb{R}^{2\times 1}$. För varje $w \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ har ekvationen

$$Ac = c_1 v_1 + c_2 v_2 = w \qquad (*_w)$$

lösningen $c = A^{-1} w$.

I synnerhet har ekvationen $c_1 v_1 + c_2 v_2 = v$ den entydiga lösningen

$$[v]_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c = A^{-1} v = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/3 \end{pmatrix} . \qquad \square$$

Denna lösning av Ex. 6 generaliseras lätt till ett bevis av följande

Sats. Låt $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ vara en kolonnföljd i $\mathbb{R}^{n\times 1}$, med tillhörande matris

$$A = \left(a_1 \middle| \dots \middle| a_n \right) \in \mathbb{R}^{n\times n} .$$

Om A inte är inverterbar, då är $\underline{a}$ inte någon bas i $\mathbb{R}^{n\times 1}$.
Om A är inverterbar, då är $\underline{a}$ en bas i $\mathbb{R}^{n\times 1}$, och för alla $w \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gäller

$$\boxed{[w]_{\underline{a}} = A^{-1} w} .$$