F3

Dimension

Varje vektorrum V tillordnas ett tal $\dim(V) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, kallat dimension av V, som innehåller viktig information om V. Dagens föreläsning ägnas detta dimensionsbegrepp, vilket bygger på följande

Sats 1. Om $(v_1, \dots, v_m)$ och $(w_1, \dots, w_n)$ är baser i ett vektorrum V, då är $m = n$.

Sats 1 rättfärdigar följande definition. Dimensionen av ett vektorrum V definieras enligt

$$\dim(V) = \begin{cases} 0 & \text{om } V = \{0\} \\ m & \text{om } V \text{ har en bas } (v_1, \dots, v_m) \text{ av längd } 0 < m < \infty \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

Ifall $\dim(V) < \infty$ kallas V för ett ändligtdimensionellt vektorrum.

Ex. 1 För alla $n \in \mathbb{N}$ är $\boxed{\dim(\mathbb{R}^n) = n}$.

Bevis. $n = 0$. $\mathbb{R}^0 := \{0\} \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^0) = \dim(\{0\}) = 0$.

$n = 1$. $\mathbb{R}^1 := \mathbb{R}$ har basen (1) av längd $1 \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^1) = \dim(\mathbb{R}) = 1$.
Obs att (1) är en bas i $\mathbb{R}$, då $c1 = 0 \Rightarrow c = 0$ visar att (1) är linjärt oberoende, och $c1 = c \ \forall\, c \in \mathbb{R}$ visar att (1) spänner upp $\mathbb{R}$.

$n \geq 2$. $\mathbb{R}^n$ har basen $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ av längd n, där $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$.
Denna bas $\underline{e}$ kallas standardbasen i $\mathbb{R}^n$. $\square$

Ex. 2 För alla $m, n \in \mathbb{N}$ är $\boxed{\dim(\mathbb{R}^{m\times n}) = mn}$.

Bevis. I fall $m = n = 2$ har $\mathbb{R}^{2\times 2}$ basen

$$\underline{E} = (E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}) := \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

av längd 4. Alltså är $\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4 = 2\cdot 2$. Allmänt har $\mathbb{R}^{m\times n}$ basen

$$\underline{E} = (E^{11}, E^{12}, \ldots, E^{m,n-1}, E^{mn}) \quad \text{av längd } mn, \text{ där}$$

$$E^{ij} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \end{array}\right) \\ j \end{array}$$

Denna bas $\underline{E}$ kallas standardbasen i $\mathbb{R}^{m\times n}$. $\square$

Varför gäller Sats 1? Den framgår av

Sats 2. Låt $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ och $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ vara följder av vektorer i ett vektorrum V, där $\underline{v}$ är en bas i V.

(i) Om $m < n$, då är $\underline{w}$ linjärt beroende.

(ii) Om $m > n$, då är $\operatorname{span}(\underline{w}) \subsetneq V$.

Bevis till Sats 1. Antag att $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ och $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ är baser i V.

$$\left.\begin{array}{lcl} \underline{w} \text{ är linjärt oberoende} & \underset{\text{Sats 2 (i)}}{\Longrightarrow} & m \geq n \\ \underline{w} \text{ spänner upp } V & \underset{\text{Sats 2 (ii)}}{\Longrightarrow} & m \leq n \end{array}\right\} \Longrightarrow m = n$$

$\square$

Ex. 3 $\boxed{\dim(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \infty}$.

Bevis. Påståendet betyder att $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ inte har någon bas av ändlig längd. Antag då motsatsen, dvs att $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ har en bas $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_m)$. Titta nu på följden $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_{m+1})$ som ges av $w_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $w_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$, osv. Ekvationen

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_{m+1} w_{m+1} = 0 \qquad (*)$$

innebär att

$$(c_1, c_2, \ldots, c_{m+1}, 0, 0, \ldots) = (0, 0, \ldots, 0, 0, 0, \ldots),$$

dvs. $(c_1, \ldots, c_{m+1}) = (0, \ldots, 0)$. Alltså är $\underline{w}$ linjärt oberoende. Enligt Sats 2 (i) är dock $\underline{w}$ linjärt beroende. Motsägelsen visar att antagandet var falskt. □

Varför gäller Sats 2? Vi närmar oss ett bevis genom att först titta på specialfall.

Bevis till Sats 2 (i). Steg 1. 3 vektorer a_1, a_2, a_3 i $\mathbb{R}^{2\times 1}$ är alltid linjärt beroende.

Bevis till Steg 1. Påståendet betyder att ekvationen

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0 \qquad (*)$$

har en icketrivial lösning $(c_1, c_2, c_3) \neq (0,0,0)$. Ekvationen $(*)$ kan skrivas

$$c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}}_{a_1} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}}_{a_2} + c_3 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}}_{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

och därmed som ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 = 0 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 = 0 \end{cases},$$

vilket har en icketrivial lösning $(c_1, c_2, c_3) \neq (0,0,0)$ då det är homogent, med fler obekanta som ekvationer. Detta bevis generaliseras utan problem till ett bevis till

Steg 2. Om $m < n$, då är n vektorer $a_1, \dots, a_n$ i $\mathbb{R}^{m \times 1}$ alltid linjärt beroende.

Steg 3. Låt $\underline{v} = (v_1, \dots, v_m)$ vara en bas i V, och $\underline{w} = (w_1, \dots, w_n)$ vara en följd i V. Sätt $a_1 = [w_1]_{\underline{v}}, \dots, a_n = [w_n]_{\underline{v}}$. Om $m < n$, så finns det enligt Steg 2 en lösning $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$ till ekvationen

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 a_1 + \dots + c_n a_n \\ &= c_1 [w_1]_{\underline{v}} + \dots + c_n [w_n]_{\underline{v}} && \text{tillämpa } [cw]_{\underline{v}} = c[w]_{\underline{v}} \\ &= [c_1 w_1]_{\underline{v}} + \dots + [c_n w_n]_{\underline{v}} && \text{tillämpa } [w+w']_{\underline{v}} = [w]_{\underline{v}} + [w']_{\underline{v}} \\ &= [c_1 w_1 + \dots + c_n w_n]_{\underline{v}}, && \text{tillämpa } [w]_{\underline{v}} = 0 \text{ omm } w = 0 \end{aligned}$$

vilken medför att

$$c_1 w_1 + \dots + c_n w_n = 0$$

för $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$. Alltså är $\underline{w}$ linjärt beroende. $\square$

Beviset till Sats 2 (ii) kan byggas upp analogt, om man förslagsvis utgår från
Steg 1. 2 vektorer a_1, a_2 i $\mathbb{R}^{3\times 1}$ spänner aldrig upp $\mathbb{R}^{3\times 1}$.
Jag lämnar detaljerna som övning till den intresserade läsaren.

Hur finner man en bas i ett vektorrum V? Vi inleder med

Ex. 4 $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ är linjärt oberoende (då de inte är proportionella), och

$\text{span}\{v_1, v_2\} \subsetneq \mathbb{R}^{3\times 1}$ enligt Sats 2 (ii), då $\dim(\mathbb{R}^{3\times 1}) = 3$.

(a) Finn $v_3 \in \mathbb{R}^{3\times 1} \setminus \text{span}\{v_1, v_2\}$.

(b) Visa att $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ är linjärt oberoende.

(c) Visa att $\underline{v}$ är en bas i $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

Lösning. (a) Vi söker $v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ så att ekvationen $c_1 v_1 + c_2 v_2 = v_3 \quad (*)$ inte har någon lösning (c_1, c_2). Ekvationen $(*)$ kan skrivas

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

och därmed som ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = x \\ c_1 + 3c_2 = y \\ c_1 - c_2 = z \end{cases},$$

vars matris vi radtransformerar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & 3 & y \\ 1 & -1 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -x+y \\ 0 & -3 & -x+z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & x \\ 0 & \boxed{1} & -x+y \\ 0 & 0 & -4x+3y+z \end{pmatrix}$$

Facit. $(*)$ har ingen lösning omm $-4x+3y+z \neq 0$. Alltså duger ex. vis $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Om $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$, då är $c_3 = 0$ (annars vore $v_3 = -\frac{c_1}{c_3} v_1 - \frac{c_2}{c_3} v_2 \in \text{span}\{v_1, v_2\}$, vilket ju inte är fallet), alltså $c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$, och därmed $c_1 = c_2 = 0$ då (v_1, v_2) är linjärt oberoende.

(c) Enligt (b) är $\underline{v}$ en bas omm $\mathrm{span}(\underline{v}) = \mathbb{R}^{3\times1}$.

Antag att $\mathrm{span}(\underline{v}) \subsetneq \mathbb{R}^{3\times1}$. Då finns en vektor $v_4 \in \mathbb{R}^{3\times1} \setminus \underline{v}$. Som i (b) visar man att (v_1, v_2, v_3, v_4) är linjärt oberoende. Enligt Sats 2 (i) gäller dock att (v_1, v_2, v_3, v_4) är linjärt beroende, då $\dim(\mathbb{R}^{3\times1}) = 3$. Motsägelsen visar att antagandet var falskt. $\square$

Genom att använda resonemanget i Ex. 4 (b) upprepade gånger, och resonemanget i Ex. 4 (c) som slutkläm, kommer man fram till

Sats 3. Låt $\dim(V) = n$. Varje linjärt oberoende följd $(v_1, \dots, v_\ell)$ i V kan utvidgas till en linjärt oberoende följd $(v_1, \dots, v_\ell, v_{\ell+1}, \dots, v_n)$, och denna är automatiskt en bas i V.

På motsvarande sätt gäller

Sats 4. Låt $\dim(V) = n$. Varje genererande följd $(v_1, \dots, v_\ell)$ i V kan förkortas till en genererande delföljd $(v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$, och denna är automatiskt en bas i V.

Antar vi i Sats 3 och Sats 4 dessutom att $\ell = n$, då får vi

Sats 5. Låt $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ vara en följd i V, där $n = \dim(V)$. Då är de följande påståendena ekvivalenta.

(i) $\underline{v}$ är linjärt oberoende.

(ii) $\underline{v}$ spänner upp V.

(iii) $\underline{v}$ är en bas i V.

Ex. 5 Låt $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}$. Visa utan räkning att $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ är en bas i $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

Lösning. v_1, v_2 är ej proportionella $\Rightarrow$ (v_1, v_2) är linjärt oberoende

$$\left.\begin{array}{r} v_3 \notin \operatorname{span}\{v_1, v_2\} \Rightarrow \underline{v} = (v_1, v_2, v_3) \text{ är linjärt oberoende} \\ 3 = \dim(\mathbb{R}^{3\times 1}) \end{array}\right\} \underset{\text{Sats 5}}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow$ $\underline{v}$ är en bas i $\mathbb{R}^{3\times 1}$. $\square$

Ytterligare en enkel konsekvens av de föregående satserna är följande nämnvärda

Sats 6. Låt U vara ett delrum till ett ändligtdimensionellt vektorrum V. Då gäller:

(i) $\dim(U) \leq \dim(V)$

(ii) Om $\dim(U) = \dim(V)$, då är $U = V$.

(iii) Om $\dim(U) < \dim(V)$, då är $U \subsetneq V$.

Beviset lämnas som övning, eller för egen läsning i kursboken sidan 213.