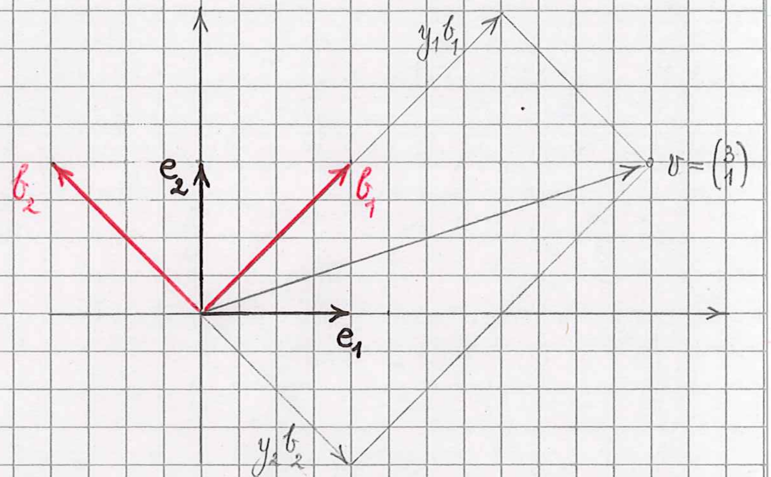
F4

Basbyte

I denna föreläsning studerar vi problem av följande slag.

Ex. 1 $\underline{e} = (e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ och $\underline{b} = (b_1, b_2) = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$ är baser i $\mathbb{R}^{2\times 1}$.

Givet $v = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, bestäm $y = [v]_{\underline{b}}$.



Elementär lösning. I standardbasen $\underline{e}$ skrivs v på formen $v = 3e_1 + e_2$.
P.s.s. söker vi skriva v i basen $\underline{b}$ som en linjärkombination $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$.
Figuren här intill åskådliggör problemets geometriska innebörd. Figuren motiverar även gissningen att $y_1 = 2$, $y_2 = -1$ kan duga.
Kontrollräkning visar att gissningen stämmer: $2b_1 - b_2 = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = v$.

Svar. $y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

Det var dock ren tur att vi kunde gissa rätt lösning. Hur går man tillväga om $v = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ ersätts med en allmän vektor $v = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$? Ex. 1 generaliseras då till

Ex 2. Låt $\underline{e}$ och $\underline{b}$ vara baserna från Ex. 1. Givet $v = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, bestäm $y = [v]_{\underline{b}}$.

Obs. att $x_1 e_1 + x_2 e_2 = x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = v$ innebär att

$$\boxed{[v]_{\underline{e}} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = v} \quad \forall v \in \mathbb{R}^{2\times 1}$$

Givet $v \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, så är alltså $[v]_{\underline{e}} = v$ känd. Ex. 2 generaliseras därmed till följande allmänna

Basbytesproblem. Låt $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ och $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ vara baser i ett vektorrum V. Varje vektor $v \in V$ bestämmer då koordinatkolonnerna $x = [v]_{\underline{a}}$ och $y = [v]_{\underline{b}}$. Givet x, hur beräknas y? Givet y, hur beräknas x?

Lösning till Ex. 2. Vi söker $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ så att

$$y_1 b_1 + y_2 b_2 = v$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = v$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = v$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = v$$

Med $T := \left(b_1 \middle| b_2 \right)$ antar denna ekvation formen $T\,y = v$, varav

$$y = T^{-1} v = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Sammanfattning. För varje $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ är $x := [v]_{\underline{e}} = v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ känd, och $y = [v]_{\underline{b}}$ beräknas utav x med hjälp av den inverterbara matrisen

$$T = \left(b_1 \middle| b_2 \right)$$

pga sambandet $Ty = x$ som $y = T^{-1} x$.

Lösningen till Ex. 2 generaliseras till följande

<u>Lösning till basbytesproblemet.</u> Låt $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ och $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ vara baser i V.
Då kallas matrisen

$$\boxed{T = T_{\underline{a}\,\underline{b}} := \left([b_1]_{\underline{a}} \,\middle|\, \dots \,\middle|\, [b_n]_{\underline{a}} \right)} \qquad (1)$$

för <u>basbytesmatrisen</u> från $\underline{b}$ till $\underline{a}$. Den är inverterbar, och inversen

$$\boxed{T^{-1} = \left(T_{\underline{a}\,\underline{b}}\right)^{-1} = T_{\underline{b}\,\underline{a}}} \qquad (2)$$

är basbytesmatrisen från $\underline{a}$ till $\underline{b}$. För alla vektorer $v \in V$ gäller sambanden

$$\boxed{\begin{aligned} [v]_{\underline{b}} &= T_{\underline{b}\,\underline{a}} [v]_{\underline{a}} = \left(T_{\underline{a}\,\underline{b}}\right)^{-1} [v]_{\underline{a}} \\ [v]_{\underline{a}} &= T_{\underline{a}\,\underline{b}} [v]_{\underline{b}} = \left(T_{\underline{b}\,\underline{a}}\right)^{-1} [v]_{\underline{b}} \end{aligned}} \qquad (3)$$

<u>Anmärkningar.</u> 1. Ifall $V = \mathbb{R}^{n \times 1}$ och $\underline{a} = \underline{e}$ är <u>standardbasen</u>, då är basbytesmatrisen

$$T_{\underline{e}\,\underline{b}} = \left([b_1]_{\underline{e}} \,\middle|\, \dots \,\middle|\, [b_n]_{\underline{e}} \right) = \left(b_1 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, b_n \right)$$

helt enkelt kolonnföljden $(b_1, \dots, b_n)$, sammansatt till en matris.

2. Alla formler (1) – (3) <u>bör läsas från höger till vänster</u>, och är på det viset lätt att minnas.

Exvis läser jag $[v]_{\underline{b}} = T_{\underline{b}\,\underline{a}} [v]_{\underline{a}}$ som "v:s koordinatkolonn i $\underline{a}$, multiplicerad med basbytesmatrisen från $\underline{a}$ till $\underline{b}$, blir v:s koordinatkolonn i $\underline{b}$".

Ex. 3 Polynomen $p_1(x) = 1-x$, $p_2(x) = x+x^2$, $p_3(x) = 1-x^2$ bildar en bas $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$ i $\mathcal{P}_2$. Finn $[p]_{\underline{p}}$ för $p(x) = 2+x-x^2$.

Lösning. Förutom basen $\underline{p}$ har vi standardbasen $\underline{X}$ i $\mathcal{P}_2$, och vi känner

$$[p]_{\underline{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{samt} \quad T_{\underline{X}\underline{p}} = \left([p_1]_{\underline{X}} \middle| [p_2]_{\underline{X}} \middle| [p_3]_{\underline{X}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Då blir

$$[p]_{\underline{p}} = T_{\underline{p}\underline{X}} [p]_{\underline{X}} = \left(T_{\underline{X}\underline{p}}\right)^{-1} [p]_{\underline{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Svar. $[p]_{\underline{p}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. M.a.o. gäller $p(x) = p_2(x) + 2p_3(x)$.

Ex. 4 Vektorerna $b_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$ bildar en bas $\underline{b}$ i $\mathbb{R}^{2\times 1}$. Finn koordinaterna för punkten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ i denna bas $\underline{b}$. (Figur!)

Lösning. Förutom basen $\underline{b}$ har vi standardbasen $\underline{e}$ i $\mathbb{R}^{2\times 1}$, och vi känner $[x]_{\underline{e}} = x$ samt

$$T_{\underline{e}\underline{b}} = \left([b_1]_{\underline{e}} \middle| [b_2]_{\underline{e}} \right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$ Därmed blir

$$[x]_{\underline{b}} = T_{\underline{b}\underline{e}} [x]_{\underline{e}} = \left(T_{\underline{e}\underline{b}}\right)^{-1} [x]_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Svar. $[x]_{\underline{b}} = \begin{pmatrix} (\cos\alpha)\, x_1 + (\sin\alpha)\, x_2 \\ -(\sin\alpha)\, x_1 + (\cos\alpha)\, x_2 \end{pmatrix}$.

I Ex. 1 – Ex. 4 var alltid en av baserna lika med standardbasen. Här kommer ett exempel på ett basbytesproblem mellan ickestandardbaser $\underline{a}$ och $\underline{b}$.

Ex. 5 Vektorerna $a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ är baser i $\mathbb{R}^{2\times 1}$.

Vektorn $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ har koordinatkolonnerna $x = [v]_{\underline{a}}$ och $y = [v]_{\underline{b}}$.

(a) Finn x.

(b) Beräkna y enligt basbytesformeln $y = Tx$.

Lösning. (a) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ är den entydiga lösningen till ekvationen

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 = v$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} -4 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ 1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -17 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ (-1)\cdot \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -12 \\ 0 & -1 & -17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & & -12 \\ & 1 & 17 \end{array}\right)$$

Svar (a) $x = \begin{pmatrix} -12 \\ 17 \end{pmatrix}$, dvs. $-12\,a_1 + 17\,a_2 = v$.

(b) Vi vet att $\underbrace{[v]_{\underline{b}}}_{y} = \underbrace{T_{\underline{b}\underline{a}}}_{T} \underbrace{[v]_{\underline{a}}}_{x}$, och vi känner x enligt (a).

Alltså återstår beräkningen av basbytesmatrisen

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = T = T_{\underline{b}\,\underline{a}} = \left([a_1]_{\underline{b}} \,\middle|\, [a_2]_{\underline{b}} \right)$$

vars j-te kolonn $[a_j]_{\underline{b}} = \begin{pmatrix} t_{1j} \\ t_{2j} \end{pmatrix}$ är den entydiga lösningen till ekvationen

$$t_{1j} b_1 + t_{2j} b_2 = a_j$$

$$t_{1j} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_{2j} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = a_j$$

$$\begin{cases} t_{1j} + t_{2j} = a_{1j} \\ 2t_{1j} + 3t_{2j} = a_{2j} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \end{array}\right)$$

Vi läser av att $T = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$. Alltså blir

$$y = Tx = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ -7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11\cdot 12 + 8\cdot 17 \\ 7\cdot 12 - 5\cdot 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

<u>Svar</u> (b) $\quad y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, <u>dvs.</u> $4b_1 - b_2 = v$.

<u>Anmärkning</u>. <u>Ur lösningen till (b) kan vi extrahera följande beräkningsmetod för</u> $T_{\underline{b}\,\underline{a}}$

$$\boxed{\left(\underline{b} \,\middle|\, \underline{a} \right) \sim \left(I \,\middle|\, T_{\underline{b}\,\underline{a}} \right)}$$

Vi avrundar basbytesämnet med två satser, vars bevis jag lämnar som övning.

Sats 1. Om $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ är tre baser i ett vektorrum V, då gäller

$$\boxed{T_{\underline{a}\underline{c}} = T_{\underline{a}\underline{b}} \, T_{\underline{b}\underline{c}} \, .}$$

Sats 2. Låt $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ vara en bas i V. För varje följd $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ i V gäller då att

$\underline{b}$ är en bas i V omm matrisen $T = \left([b_1]_{\underline{a}} \middle| \cdots \middle| [b_n]_{\underline{a}} \right)$ är inverterbar.