F5

Radrum, kolonnrum, nollrum

Givet en matris $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, så betecknar vi

A:s i-te rad med $A_{i\bullet} := (A_{i1} \ \dots \ A_{in})$, och

A:s j-te kolonn med $A_{\bullet j} := \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}$.

Matrisen A bestämmer radföljden $(A_{1\bullet}, \dots, A_{m\bullet})$ i $\mathbb{R}^{1\times n}$, vilken i sin tur spänner upp delrummet

$$R(A) := \operatorname{span}\{A_{1\bullet}, \dots, A_{m\bullet}\} \subset \mathbb{R}^{1\times n},$$

kallat radrummet till A. Matrisen A bestämmer även kolonnföljden $(A_{\bullet 1}, \dots, A_{\bullet n})$, vilken i sin tur spänner upp delrummet

$$K(A) := \operatorname{span}\{A_{\bullet 1}, \dots, A_{\bullet n}\} \subset \mathbb{R}^{m\times 1},$$

kallat kolonnrummet till A.

Problem 1. Givet $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, finn en bas i radrummet $R(A)$ och i kolonnrummet $K(A)$.

Vi börjar med $R(A)$, och närmar oss en lösning till Problem 1 genom att titta på exempel.

Ex. 1 För $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ & & 1 & 4 & 0 \\ & & & & 1 \\ & & & & \end{pmatrix}$ är

$$\begin{aligned} R(A) &= \operatorname{span}\{(1\,2\,0\,3\,0), (0\,0\,1\,4\,0), (0\,0\,0\,0\,1), (0\,0\,0\,0\,0)\} \\ &= \operatorname{span}\{(1\,2\,0\,3\,0), (0\,0\,1\,4\,0), (0\,0\,0\,0\,1)\} \end{aligned}$$

Dessutom är $A_{1\cdot}, A_{2\cdot}, A_{3\cdot}$ linjärt oberoende, då

$$c_1 A_{1\cdot} + c_2 A_{2\cdot} + c_3 A_{3\cdot} = 0$$

innebär att

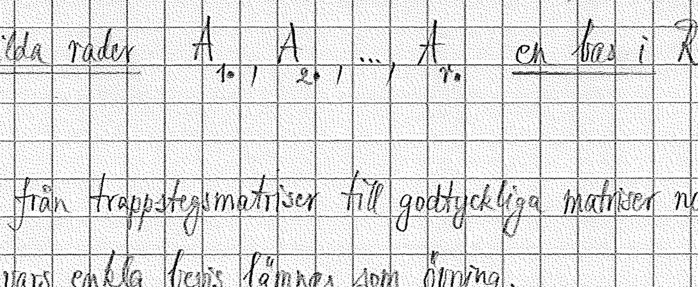
$$\left(\underbrace{c_1}\ 2c_1\ \underbrace{c_2}\ 3c_1+4c_2\ \underbrace{c_3}\right) = \left(\underbrace{0}\ 0\ \underbrace{0}\ 0\ \underbrace{0}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad (c_1, c_2, c_3) = (0,0,0).$$

Svar. A:s nollskilda rader $A_{1\cdot}, A_{2\cdot}, A_{3\cdot}$ bildar en bas i $R(A)$.

Varför gick Ex. 1 så enkelt igenom? Därför att matrisen A är en trappstegsmatris! Samma resonemang går faktiskt igenom för varje trappstegsmatris A. Vi konstaterar som

Ex. 2 För varje trappstegsmatris

$A =$ 

bildar A:s nollskilda rader $A_{1\cdot}, A_{2\cdot}, \ldots, A_{r\cdot}$ en bas i $R(A)$.

Innan vi tar steget från trappstegsmatriser till godtyckliga matriser noterar vi följande mycket allmänna Lemma, vars enkla bevis lämnas som övning.

Lemma. För alla vektorer v, w i ett vektorrum V gäller:

(i) $\quad \operatorname{span}\{v, w\} = \operatorname{span}\{w, v\}$

(ii) $\quad \operatorname{span}\{v, w\} = \operatorname{span}\{v, cw\} \qquad \forall c \neq 0$

(iii) $\quad \operatorname{span}\{v, w\} = \operatorname{span}\{v, cv + w\} \qquad \forall c \in \mathbb{R}$

Av lemmat framgår följande sats, som ofta är nyttig i beräkningen av spannet.

Sats 1. För varje följd $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ i ett vektorrum V ändras $\mathrm{span}(\underline{v})$ inte, om

(i) två vektorer i $\underline{v}$ kastas om,

(ii) en vektor i $\underline{v}$ multipliceras med $c \neq 0$, eller

(iii) en skalär multipel av en vektor adderas till en annan vektor i $\underline{v}$.

Om nu $A \sim B$ är elementärt radekvivalenta matriser av storlek $m \times n$, då säger Sats 1 att

$$R(A) = \mathrm{span}\{A_{1\cdot}, \ldots, A_{m\cdot}\} = \mathrm{span}\{B_{1\cdot}, \ldots, B_{m\cdot}\} = R(B).$$

Då varje matris A kan radtransformeras till en trappstegsmatris T, är vi framme vid följande

Lösning av Problem 1 med avseende på $R(A)$. Låt $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ vara en godtycklig matris, med tillhörande radekvivalenta trappstegsmatris T. Då gäller:

(i) $R(A) = R(T)$

(ii) T:s nollskilda rader $T_{1\cdot}, \ldots, T_{r\cdot}$ bildar en bas i $R(A)$.

(iii) $\dim(R(A))$ = antalet nollskilda rader i T =: radrang(A)

Ex. 3 Givet $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, finn en bas i $R(A)$ och utvidga den till en bas i $\mathbb{R}^{1\times 3}$.

Lösning. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T$

Svar. $T_{1\cdot} = (1\ 0\ -3)$, $T_{2\cdot} = (0\ 1\ 4)$ bildar en bas i $R(A)$. Med $e_3 = (0\ 0\ 1)$ är $(T_{1\cdot}, T_{2\cdot}, e_3)$ en linjärt oberoende följd av längd $3 = \dim(\mathbb{R}^{1\times 3})$, alltså en bas i $\mathbb{R}^{1\times 3}$.

På motsvarande sätt kan Problem 1 lösas m.a.p. $K(A)$, då man tillämpar Sats 1 på kolonnföljden i en given matris A. Vi nöjer oss med

Ex. 4 Givet A som i Ex. 3, finn en bas i $K(A)$.

Lösning. Vi kolonntransformerar A (Notation: $\underset{k}{\sim}$) till sin kolonnvisa trappstegsform U.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \underset{k}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{k}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = U$$

(−2), (−5), (−4)

Med Sats 1 gäller att

$$K(A) = \operatorname{span}\{A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}, A_{\bullet 3}\} = \operatorname{span}\{U_{\bullet 1}, U_{\bullet 2}, U_{\bullet 3}\} = \operatorname{span}\{U_{\bullet 1}, U_{\bullet 2}\}.$$

Dessutom är $U_{\bullet 1}, U_{\bullet 2}$ linjärt oberoende.

Svar. U:s nollskilda kolonner $U_{\bullet 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $U_{\bullet 2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bildar en bas i $K(A)$.

Därmed gäller även

$$\dim(K(A)) = \text{antalet nollskilda kolonner i } U =: \text{kolonnrang}(A)$$

Obs. att $\dim(R(A)) = 2 = \dim(K(A))$ gäller för matrisen A i Ex. 3 och Ex. 4.

Detta är ingen slump!

Sats 2. För varje matris $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gäller

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{radrang}(A) & = & \text{kolonnrang}(A) \\ \| & & \| \\ \dim(R(A)) & = & \dim(K(A)). \end{array}}$$

och därmed

Detta rättfärdigar det korta talesättet $\text{rang}(A) := \text{radrang}(A) = \text{kolonnrang}(A)$.

<u>Bevis.</u> Till varje matris A finns det en radekvivalent trappstegsmatris T, vars pivotkolonner

$T_{\bullet j_1}, \dots, T_{\bullet j_r}$ bildar en bas i $K(T)$, vilket lätt framgår av T:s gestalt.

$(*) \Downarrow$ Ej uppenbart: se Ex. 5 nedan

$A_{\bullet j_1}, \dots, A_{\bullet j_r}$ bildar en bas i $K(A)$. Alltså är

$$\begin{aligned}\text{radrang}(A) &= \text{antalet nollskilda rader i } T \\ &= \text{antalet pivotkolonner i } T = r \underset{(*)}{=} \dim(K(A)) = \text{kolonnrang}(A) \quad \square\end{aligned}$$

<u>Ex. 5</u> <u>Givet</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 3 \end{pmatrix}$, <u>finn en bas i</u> $K(A)$ <u>bland</u> <u>A:s kolonner</u>.

<u>Lösning.</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ (-2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ & & 1 & 4 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ & & 1 & 4 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = T$$

T:s pivotkolonner $T_{\bullet 1}, T_{\bullet 3}, T_{\bullet 5}$ bildar en bas i $K(T)$.

Detta medför enligt $(*)$ att $A_{\bullet 1}, A_{\bullet 3}, A_{\bullet 5}$ bildar en bas i $K(A)$. Vi verifierar detta.

$$c_1 A_{\bullet 1} + c_2 A_{\bullet 3} + c_3 A_{\bullet 5} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} A_{\bullet 1} & A_{\bullet 3} & A_{\bullet 5} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{\bullet 1} & A_{\bullet 3} & A_{\bullet 5} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right) \underset{\text{se ovan}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow (c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0).$$

Alltså är $A_{\bullet 1}, A_{\bullet 3}, A_{\bullet 5}$ linjärt oberoende.

$c_1 A_{\bullet 1} + c_2 A_{\bullet 3} + c_3 A_{\bullet 5} = A_{\bullet 4}$ löses av $(c_1, c_2, c_3) = (3, 4, 0)$, då

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A_{\bullet 1} & A_{\bullet 3} & A_{\bullet 5} & A_{\bullet 4} \end{array}\right] \underset{\text{se ovan}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 3 \\ & 1 & & 4 \\ & & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Alltså är $A_{\bullet 4} \in \operatorname{span}\{A_{\bullet 1}, A_{\bullet 3}, A_{\bullet 5}\}$. Dessutom är

$A_{\bullet 2} = 2A_{\bullet 1} \in \operatorname{span}\{A_{\bullet 1}, A_{\bullet 3}, A_{\bullet 5}\}$. Därmed blir

$$K(A) = \operatorname{span}\{A_{\bullet 1}, \cancel{A_{\bullet 2}}, A_{\bullet 3}, \cancel{A_{\bullet 4}}, A_{\bullet 5}\} = \operatorname{span}\{A_{\bullet 1}, A_{\bullet 3}, A_{\bullet 5}\}.$$

Svar. $(A_{\bullet 1}, A_{\bullet 3}, A_{\bullet 5})$ är en bas i $K(A)$.

Givet $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, så är lösningsmängden

$$N(A) = \{ x \in \mathbb{R}^{n \times 1} \mid Ax = 0 \}$$

ett delrum i $\mathbb{R}^{n \times 1}$, kallat nollrummet till A.

Problem 2. Givet $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, finn en bas i nollrummet $N(A)$.

Lösning. Radtransformera A till en trappstegsmatris T. Då gäller

$$Ax = 0 \iff Tx = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^{n \times 1},$$

vilket innebär att $N(A) = N(T)$. En bas till $N(T)$ kan läsas av från T. Till varje ickepivotkolonn i T hör precis en basvektor i $N(T)$: se Ex. 6 nedan. □

Detta leder oss fram till

Dimensionssatsen. För varje matris $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gäller $\boxed{\dim N(A) + \operatorname{rang}(A) = n}$.

Bevis.
$$\begin{aligned}\dim N(A) &= \dim N(T) \\ &= \text{antalet ickepivotkolonner i } T \\ &\overset{\text{se ovan}}{=} n - \text{antalet pivotkolonner i } T \\ &= n - \text{antalet nollskilda rader i } T \\ &= n - \operatorname{rang}(A)\end{aligned}$$
$\square$

Namnet "dimensionssatsen" blir tydligare om man kommer ihåg Sats 2:

$$\boxed{\operatorname{rang}(A) = \dim R(A) = \dim K(A)}.$$

Ex. 6 Givet $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ & & 1 & 4 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$, finn en bas i $N(T)$.

Lösning. $x \in N(T) \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_4 \\ x_3 = -4x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Sätt $x_2 = s$, $x_4 = t$, där $s, t \in \mathbb{R}$. En allmän lösning $x \in N(T)$ har då formen

$$x = \begin{pmatrix} -2s - 3t \\ s \\ -4t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = s \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{n_1} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{n_2} = sn_1 + tn_2, \text{ där } s, t \in \mathbb{R}.$$

Därmed är $\operatorname{span}\{n_1, n_2\} = N(T)$. Dessutom är n_1, n_2 linjärt oberoende.

Svar. (n_1, n_2) är en bas i $N(T)$.