F6 Linjära avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Det mesta av det här ämnet ingår i förkunskapskravet. Vi fattar oss därför kort.

Låt V och W vara vektorrum. En avbildning $f: V \to W$ kallas **linjär** om

(L1) $\quad f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \forall\, u, v \in V \quad$ (Additivitet)

(L2) $\quad f(cv) = c f(v) \quad \forall\, c \in \mathbb{R},\ \forall\, v \in V. \quad$ (Homogenitet)

Idag studerar vi linjära avbildningar mellan kolonnrummen $V = \mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{n\times 1}$ och $W = \mathbb{R}^m := \mathbb{R}^{m\times 1}$.
Dessa kan fullständigt beskrivas m.h.a. matriser, enligt följande

Sats 1. Varje matris $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ bestämmer en linjär avbildning

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad f_A(x) = Ax.$$

Omvänt finns det till varje linjär avbildning $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ precis en matris $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ så att

$$f = f_A, \quad \text{dvs.} \quad f(x) = f_A(x) = Ax \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Denna matris A kallas f:**s matris**, betecknas $A = [f]$, och bestäms av f enligt

$$A = [f] = \begin{pmatrix} f(e_1) & \cdots & f(e_n) \end{pmatrix},$$

där $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ är standardbaskolonnerna i $\mathbb{R}^n$.

<u>Ex. 1</u> <u>Den linjära avbildningen</u> $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ <u>uppfyller</u> $f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

(a) <u>Finn</u> f:s <u>matris</u>.

(b) <u>Bestäm</u> $f(x)$ <u>för godtyckligt</u> $x \in \mathbb{R}^3$.

<u>Lösning</u>. (a) Vi sätter upp matrisen $M = \left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array}\right)$, där $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Sedan kolonntransformerar vi M. Då f är linjär, så gäller p.g.a. (L1) och (L2) att

$$c\left(\begin{array}{c} v \\ \hline f(v) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} cv \\ \hline cf(v) \end{array}\right) \underset{(L2)}{=} \left(\begin{array}{c} cv \\ \hline f(cv) \end{array}\right), \quad \text{samt}$$

$$c\left(\begin{array}{c} v \\ \hline f(v) \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} w \\ \hline f(w) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} cv + w \\ \hline f(cv) + f(w) \end{array}\right) \underset{(L1)}{=} \left(\begin{array}{c} cv + w \\ \hline f(cv + w) \end{array}\right).$$

Efter kolonntransformationer $M \underset{k}{\sim} \cdots \underset{k}{\sim} N$ är alltså $N = \left(\begin{array}{c|c|c} w_1 & w_2 & w_3 \\ \hline f(w_1) & f(w_2) & f(w_3) \end{array}\right)$.

Målet är då att kolonntransformera M så att $(w_1\ w_2\ w_3) = I$ (= enhetsmatrisen).

Då kan vi läsa av $A = [f] = \left(f(e_1) \,|\, f(e_2) \,|\, f(e_3)\right)$. Nu kör vi!

$$M = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ \hline -2 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ \hline -2 & 2 & 5/3 \\ -3 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & -1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array}\right)$$

<u>Svar</u> (a). $A = [f] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

(b) <u>För alla</u> $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ <u>är</u>

$$f(x) = Ax = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -x_1 - 4x_2 + 5x_3 \\ -3x_1 - 3x_2 + 6x_3 \end{pmatrix}.$$

<u>Bevis till Sats 1.</u> <u>Om</u> $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, <u>då är</u> $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f_A(x) = Ax$ <u>linjär.</u>

(L1) $f_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = f_A(x) + f_A(y)$

(L2) $f_A(cx) = A(cx) = c(Ax) = c f_A(x)$

<u>Om</u> $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ <u>är linjär, då har matrisen</u> $A \doteq \big(f(e_1) \,|\, \cdots \,|\, f(e_n)\big) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ <u>den önskade egenskapen</u> $f(x) = Ax \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Ifall $n = 3$ ex.vis är

$$\begin{aligned} f(x) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) \\ &\underset{(L1)}{=} f(x_1 e_1) + f(x_2 e_2) + f(x_3 e_3) \\ &\underset{(L2)}{=} x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + x_3 f(e_3) \\ &= \big(f(e_1) \,|\, f(e_2) \,|\, f(e_3)\big)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Ax \end{aligned}$$

<u>Om</u> $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ <u>är linjär och</u> $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ <u>uppfyller</u> $f(x) = Ax$ <u>och</u> $f(x) = Bx$ <u>för alla</u> $x \in \mathbb{R}^n$, <u>då är</u> $A = B$. För alla $j \in \underline{n}$ $(:= \{1, \dots, n\})$ är

$$A_{\cdot j} = Ae_j = f(e_j) = Be_j = B_{\cdot j},$$

dvs $A = B$ gäller kolonnvis, och därmed är $A = B$. $\square$

Sammanfattning. Med notationen $\mathcal{L}(V,W) := \{ f : V \to W \mid f \text{ är linjär} \}$ har vi följande korrespondens mellan matriser och linjära avbildningar:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^{m\times n} & \rightleftarrows & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\
A & \longmapsto & f_A \\
[f] & \longleftarrow\!\shortmid & f
\end{array}
$$

Härvid svarar

a) matrismultiplikation mot sammansättning av linjära avbildningar,

b) kvadratiska matriser mot linjära operatorer,

c) inverterbara matriser mot inverterbara operatorer.

Vi tittar lite närmare på dessa motsvarigheter.

a) Sats 2. Om $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ är linjära avbildningar, då är även den sammansatta avbildningen $gf : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$, $gf(x) = g(f(x))$ linjär, och dess matris är

$$\boxed{[gf] = [g][f]}$$

Ex. 2 Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara speglingen i xy-planet, och g speglingen i xz-planet. Visa att gf är rotationen r kring x-axeln med vinkel π.

Lösning.
$$
\begin{aligned}
[gf] = [g][f] &= \begin{pmatrix} g(e_1) & g(e_2) & g(e_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r(e_1) & r(e_2) & r(e_3) \end{pmatrix} = [r]
\end{aligned}
$$

medför $gf(x) = [gf]\,x = [r]\,x = r(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \implies gf = r$. □

b) Allmänt kallas en linjär avbildning $f: V \to W$ för linjär operator om $V = W$.

I synnerhet gäller då för varje linjär avbildning $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ med tillhörande matris

$A = [f] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ att

$$f \text{ är en linjär operator} \iff \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \iff m = n$$
$$\iff A \text{ är kvadratisk.}$$

c) På varje vektorrum V finns den identiska operatorn $\mathbb{1}: V \to V$, $\mathbb{1}(v) = v$.

En linjär operator $f: V \to V$ kallas inverterbar om det finns en linjär operator $g: V \to V$ så att $gf = \mathbb{1} = fg$. I så fall är g entydigt bestämd av f, betecknas f^{-1} och kallas inversen till f.

Sats 3. En linjär operator $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är inverterbar omm dess matris $[f]$ är inverterbar. I så fall är

$$\boxed{[f^{-1}] = [f]^{-1}}$$

Ex. 3 Rotationen kring origo moturs med vinkel α är en linjär operator $r_\alpha: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Då

$$r_{-\alpha} r_\alpha = \mathbb{1} = r_\alpha r_{-\alpha},$$

så är operatorn r_α inverterbar, och $r_\alpha^{-1} = r_{-\alpha}$. Enligt Sats 3 är även matrisen $[r_\alpha]$ inverterbar, och $[r_\alpha]^{-1} = [r_\alpha^{-1}] = [r_{-\alpha}]$. Detta stämmer väl överens med

$$[r_\alpha]^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = [r_{-\alpha}].$$

Ex. 4 Visa att operatorn $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ är

(a) linjär, och

(b) inverterbar.

(c) Finn $f^{-1}(y)$ för godtyckligt $y \in \mathbb{R}^2$.

Lösning. (a) $f(x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Ax \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$ visar att $f = f_A$ för

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Enligt Sats 1 är f_A linjär.

(b) $\det(A) = 3 \Rightarrow A$ är inverterbar

$\Rightarrow [f] = A$ är inverterbar

$\underset{\text{Sats 3}}{\Rightarrow} f$ är inverterbar.

(c)
$$f^{-1}(y) = [f^{-1}]\,y \underset{\text{Sats 3}}{=} [f]^{-1}\,y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_1 + 2y_2 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Ex. 5 Operatorn $f = f_A$ på $\mathbb{R}^3$ ges av $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Visa att $U = \{ u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = 0 \}$ är ett delrum i $\mathbb{R}^3$.

(b) Visa att $V = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = v \text{ är lösbar} \}$ är ett delrum i $\mathbb{R}^3$.

(c) Finn en bas i U och V.

Lösning. (a) För alla $x \in \mathbb{R}^3$ är $f(x) = f_A(x) = Ax$, alltså

$x \in U \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x \in N(A)$, alltså $U = N(A)$.

Vi vet att nollrummet till en matris är ett delrum.

(b) För alla $y \in \mathbb{R}^3$ gäller

$$\begin{aligned} y \in V &\Leftrightarrow f(x) = y \quad \text{har en lösning } x \\ &\Leftrightarrow Ax = y \quad \text{har en lösning } x \\ &\Leftrightarrow x_1 A_{\bullet 1} + x_2 A_{\bullet 2} + x_3 A_{\bullet 3} = y \quad \text{har en lösning } x \\ &\Leftrightarrow y \in \operatorname{span}\{A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}, A_{\bullet 3}\} \\ &\Leftrightarrow y \in K(A). \end{aligned}$$

Alltså är $V = K(A)$, och vi vet att $K(A)$ är ett delrum.

(c)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$Ax = 0 \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}. \quad \text{Sätt } x_3 = t \in \mathbb{R}.$$

En allmän vektor i $U = N(A)$ har då formen

$$x = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{där } t \in \mathbb{R}.$$

Alltså är $U = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, och $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ <u>är en bas i</u> U.

Då $T_{\bullet 1}, T_{\bullet 2}$ är en bas i $K(T)$, är $A_{\bullet 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A_{\bullet 2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ <u>en bas i</u> $K(A) = V$. $\square$