# F7 Egenvärden och egenvektorer

Korrespondensen mellan kvadratiska matriser och linjära operatorer är intressant i båda riktningar.

$$\mathbb{R}^{n\times n} \longleftrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

$$A \longmapsto f_A$$

$$[f] \longleftarrow f$$

I kursen Linjär algebra och geometri I sysslade ni mycket med problem av följande slag: En linjär operator $f$ är givet geometriskt (ex. vis som spegling, projektion, rotation), bestäm dess matris $[f]$.
Nu vänder vi om problemet och frågar istället: Givet en kvadratisk matris $A$, vilken geometrisk innebörd har operatorn $f_A$?

Ex. 1 Givet $A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, visa att $f_A$ är en spegling. Ange speglingens axel.

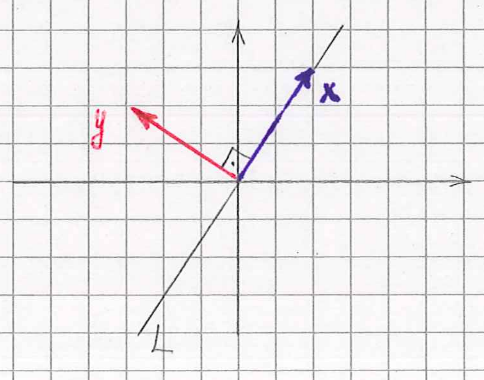
Lösning. Om $f_A$ är en spegling, med axel $L = \text{span}\{l\}$ och normalvektor $n \perp l$, då gäller

$$Al = f_A(l) = l \quad \text{och} \quad An = f_A(n) = -n .$$

Men dessa ekvationer karakteriserar speglingen! Om nämligen

$$Ax = x \quad (1) \qquad \text{och} \qquad Ay = -y \quad (2)$$

har nollskilda lösningar $x \perp y$, då är $f_A$ en spegling med axel $L = \text{span}\{x\}$.



Strategin är därmed att lösa (1) och (2).

(1)
$$A x = x$$
$$A x = I x$$
$$I x - A x = 0$$
$$(I - A) x = 0$$

(2)
$$A y = -y$$
$$A y = -I y$$
$$-I y - A y = 0$$
$$(-I - A) y = 0$$

$$I - A = \begin{matrix} 2\cdot \\ 2\cdot \end{matrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) är alltså ekvivalent med $x_1 = \sqrt{3}\, x_2$. Vi sätter $x_2 = s \in \mathbb{R}$. Då är

$$x = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\, s \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$ den allmänna lösningen till (1).

$x = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ löser (1). $y = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ är ortogonal mot $x$, och

$$A y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1+3 \\ -\sqrt{3}-\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} = -y$$

Svar. $f_A$ är en spegling med axel $L = \mathrm{span}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$, då $x = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ löser

$$\begin{cases} A x = x \\ A y = -y \\ x \cdot y = 0 \end{cases}$$

Hur gör man utan tipset att $f_A$ är en spegling? Man kan då fortfarande lösa ekvationerna (1) och (2). Men om de endast har den triviala lösningen $x = 0$ och $y = 0$?

Man förbättrar ansatsen på följande vis. Givet $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, så söker man först alla skalärer $\lambda \in \mathbb{R}$ för vilka $Ax = \lambda x$ har en icketrivial lösning $x$, sedan söker man alla lösningar $x$ till $Ax = \lambda x$, sedan tolkar man $f_A$ mot denna bakgrund.

__Ex. 2__ __Låt__ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) __Finn alla $\lambda \in \mathbb{R}$ för vilka__ $Ax = \lambda x$ __har en icketrivial lösning__ $x \neq 0$.

(b) __Lös__ $Ax = \lambda x$ __för alla dessa__ $\lambda$.

(c) __Tolka operatorn__ $f_A$ __geometriskt__.

__Lösning.__ (a)

$$\begin{array}{rcll} Ax &=& \lambda x & \text{har en lösning } x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \\ Ax &=& \lambda I x & \text{har en lösning } x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \\ \lambda I x - Ax &=& 0 & \text{har en lösning } x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \\ (\lambda I - A)x &=& 0 & \text{har en lösning } x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \\ \lambda I - A & & & \text{är inte inverterbar} \quad \Leftrightarrow \\ \det(\lambda I - A) &=& 0 & \quad \Leftrightarrow \\ \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} &=& 0 & \quad \Leftrightarrow \\ (\lambda-1)\lambda &=& 0 & \quad \Leftrightarrow \\ \lambda = 0 \text{ eller } \lambda = 1 & & & \end{array}$$

(b) $Ax = 0x = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} -s \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, där $s \in \mathbb{R}$.

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax = 0\} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$Ax = 1x = x \Leftrightarrow (I - A)x = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$, då

$$I - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax = x\} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

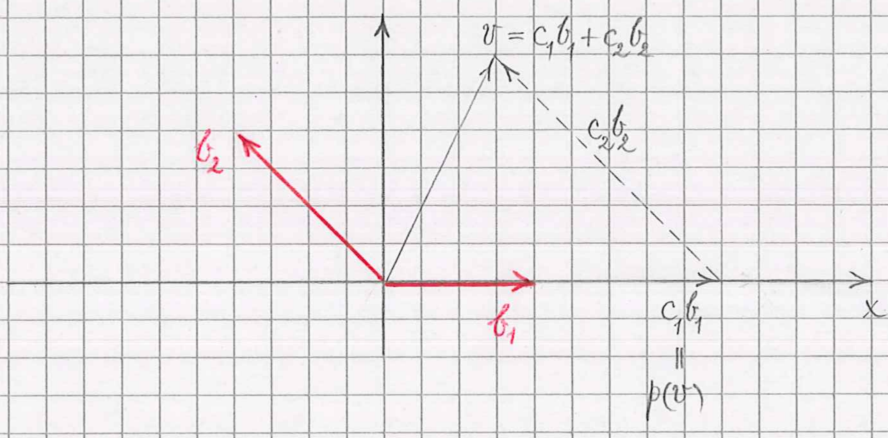
(c) $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en bas i $\mathbb{R}^2$ som är väl anpassad till $f_A$, såtillvida som $f_A(b_1) = b_1$ och $f_A(b_2) = 0$. Projektionen $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ parallellt med $b_2$ på x-axeln uppfyller också $p(b_1) = b_1$ och $p(b_2) = 0$. En allmän vektor $v \in \mathbb{R}^2$ kan skrivas $v = c_1 b_1 + c_2 b_2$, där $c = [v]_{\underline{b}}$, och därmed blir

$$f_A(v) \underset{f_A \text{ linjär}}{=} c_1 f_A(b_1) + c_2 f_A(b_2) = c_1 b_1 + c_2 0 = c_1 b_1$$

$$\Vert$$

$$p(v) \underset{p \text{ linjär}}{=} c_1 p(b_1) + c_2 p(b_2) = c_1 b_1 + c_2 0 = c_1 b_1$$

Svar (c). $f_A$ är projektionen parallellt med $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ på x-axeln.




Nu tar vi steget till allmänna formuleringar.

Problem. Givet en kvadratisk matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, vilken geometrisk innebörd har operatorn $f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_A(x) = Ax$ ?

Lösningsstrategi. (a) Finn alla skalärer $\lambda \in \mathbb{R}$ för vilka $Ax = \lambda x$ har en icketrivial lösning $x \neq 0$. Dessa $\lambda$ kallas för $A$:s egenvärden. De bestäms som lösningarna till determinantekvationen

$$\boxed{\det(\lambda I - A) = 0.} \qquad (*)$$

För givet $A$ är $(*)$ ett $n$-tegradspolynom i $\lambda$, kallat för $A$:s karaktäristiska polynom.

(b) Lös ekvationen $Ax = \lambda x$ för varje egenvärde $\lambda$ till $A$. Lösningsmängden är nollrummet $N(\lambda I - A)$, alltså ett delrum i $\mathbb{R}^n$, kallat egenrummet till $A$ och $\lambda$, och betecknat

$$\boxed{E(\lambda) = E_A(\lambda) := N(\lambda I - A).}$$

Varje nollskild vektor $x \in E_A(\lambda)$ kallas egenvektor till $A$ med egenvärde $\lambda$. En bas i $E(\lambda)$ bestäms med Gaussalgoritm, tillämpad på $\lambda I - A$.

(c) Tolka operatorn $f_A$ geometriskt utifrån (b).

Ex.3 Givet $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, tolka operatorn $f_A$ geometriskt.

Lösning. (a) Finn $A$:s egenvärden.

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \lambda + \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \lambda + \frac{1}{3} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ -\frac{2}{3} & \lambda + \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \lambda + \frac{1}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & \lambda+\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \lambda+\frac{1}{3} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \frac{2}{3} \\ \\ \\ \end{array} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)^2$$

löses av $\lambda = \pm 1$.

(b) Finn en bas i $A$:s egenrum $E(1)$ och $E(-1)$.

$$E(1) = N(I-A). \qquad I-A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} \frac{3}{4}\cdot \\ \frac{3}{2}\cdot \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} \\ \frac{2}{3}\cdot \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} \\ \frac{1}{2} \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ svarar mot systemet $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$,

vars lösningsmängd är $E(1) = \left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alltså är $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en bas i $E(1)$.

$$E(-1) = N(-I-A). \qquad -I-A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

svarar mot ekvationen $x_1 = -x_2 - x_3$, vars lösningsmängd är

$$E(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Alltså är $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en bas i $E(-1)$.

(c) $(b_1, b_2, b_3)$ är en bas i $\mathbb{R}^3$ som är väl anpassad till $f_A$, såtillvida som

$$f_A(b_1) = b_1, \quad f_A(b_2) = -b_2, \quad f_A(b_3) = -b_3.$$

Obs att $b_1 \cdot b_2 = 0 = b_1 \cdot b_3$, dvs. $b_1 \perp b_2$ och $b_1 \perp b_3$. Därmed gäller även för rotationen $r$ kring axeln $\operatorname{span}(b_1)$ med vinkel $\pi$ att

$$r(b_1) = b_1, \quad r(b_2) = -b_2, \quad r(b_3) = -b_3.$$

Då $\underline{b}$ är en bas och både $f_A$ och $r$ är linjära operatorer, medför $f_A(b_i) = r(b_i)\ \forall i \in \underline{3}$

att $f_A(v) = r(v)\ \forall v \in \mathbb{R}^3$, dvs. $f_A = r$.

Svar. Operatorn $f_A$ är rotationen kring rymddiagonalen $\operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ med vinkel $\pi$.

Ex. 4 Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Finns det en bas i $\mathbb{R}^2$ som består av egenvektorer till $A$?

Lösningen lämnas som övning.