F8

Diagonalisering

Givet $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, så söker vi förstå den linjära operatorn $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_A(x) = Ax$. I förra föreläsningens Ex. 1 - Ex. 3 lyckades vi med detta, då vi alltid hittade en bas i $\mathbb{R}^n$ som var "välanpassad" till f_A i meningen att den bestod av idel egenvektorer till A. En sådan bas karaktäriserar operatorn f_A på ett särskilt påtagligt sätt. Ex. vis gäller:

n	Operatorn f_A på $\mathbb{R}^n$ är ...	... omm det finns en bas $b_1, \dots, b_n$ i $\mathbb{R}^n$ så att
2	en spegling i en linje	$Ab_1 = b_1$, $Ab_2 = -b_2$, $b_1 \perp b_2$
2	en projektion på en linje	$Ab_1 = b_1$, $Ab_2 = 0$
3	en rotation med vinkel π	$Ab_1 = b_1$, $Ab_2 = -b_2$, $Ab_3 = -b_3$, $b_1 \perp b_2$, $b_1 \perp b_3$
3	en spegling i ett plan	$Ab_1 = -b_1$, $Ab_2 = b_2$, $Ab_3 = b_3$, $b_1 \perp b_2$, $b_1 \perp b_3$
3	en projektion på ett plan	$Ab_1 = b_1$, $Ab_2 = b_2$, $Ab_3 = 0$
n	diagonaliserbar	$Ab_1 = \lambda_1 b_1, \dots, Ab_n = \lambda_n b_n$

I stor allmänhet anser man att en operator $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är väl förstådd om man har hittat en bas $\underline{b}$ i $\mathbb{R}^n$ så att

$$\boxed{Ab_i = \lambda_i b_i}$$

gäller för vissa skalärer $\lambda_i \in \mathbb{R}$ och för alla $i \in \underline{n}$, dvs om $\underline{b}$ består av idel egenvektorer till A. Sambandet mellan den givna matrisen A, basen $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ och den tillhörande följden av egenvärden $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ uttrycks av en viktig matrisekvation.

Sats 1. För varje kvadratisk matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är de följande påståendena ekvivalenta.

(i) Det finns en bas $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ i $\mathbb{R}^n$ som består av idel egenvektorer till A.

(ii) Det finns en inverterbar matris $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ och en diagonalmatris $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ så att

$$\boxed{T^{-1} A T = D}$$

En kvadratisk matris A kallas diagonaliserbar om (i) och (ii) gäller för A.

Ex. 1 $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ är diagonaliserbar, då $b_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ är en bas i $\mathbb{R}^2$

med $Ab_1 = b_1$ och $Ab_2 = -b_2$.

Ex. 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ är diagonaliserbar, då $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en bas i $\mathbb{R}^2$

med $Ab_1 = b_1$ och $Ab_2 = 0$.

Ex. 3 $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ är diagonaliserbar, då $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

är en bas i $\mathbb{R}^3$ med $Ab_1 = b_1$, $Ab_2 = -b_2$, $Ab_3 = -b_3$.

Ex. 4 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ är inte diagonaliserbar.

Bevis. $0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$ löses av endast av $\lambda = 0$. Alltså är $\lambda = 0$ det enda egenvärdet till A. Egenrummet $E(0) = N(0I - A) = N(-A) = N(A)$ $= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Om b_1, b_2 är godtyckliga egenvektorer till A, då är $b_1 = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ och $b_2 = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$ linjärt beroende. Alltså gäller inte (i) för A. $\square$

Ekvivalensen (i) $\Leftrightarrow$ (ii) i Sats 1 är faktiskt konstruktiv. Hur dessa konstruktioner går till beskriver

Sats 2. Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vara en kvadratisk matris.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Antag att $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ är en bas i $\mathbb{R}^n$ så att $Ab_j = \lambda_j b_j \quad \forall j \in \underline{n}$.

Då uppfyller basbytesmatrisen $T = T_{\underline{e}\,\underline{b}} = \left(b_1 \middle| \dots \middle| b_n\right)$ och diagonalmatrisen $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$$T^{-1} A T = D$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Antag att T är en inverterbar matris och $D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$ så att $T^{-1}AT = D$..

Då är T:s kolonnföljd $(T_{\bullet 1}, \dots, T_{\bullet n})$ en bas i $\mathbb{R}^n$, och

$$A T_{\bullet j} = d_j T_{\bullet j} \qquad \forall j \in \underline{n}$$

Låt oss illustrera konstruktionen bakom (i) $\Rightarrow$ (ii) i Ex.1 – Ex.3.

Ex. 1 Med $T = \left(b_1 \middle| b_2\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ gäller

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ex. 2 Med $T = \left(b_1 \middle| b_2\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$ gäller

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Ex. 3</u> Med $T = \left(b_1 \middle| b_2 \middle| b_3\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

gäller

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

<u>Bevis till</u> (i) $\Rightarrow$ (ii). Enligt förutsättning gäller

$$A b_j = \lambda_j b_j \qquad \forall j \in \underline{n} \tag{1}$$

Enligt konstruktion av T kan vi skriva (1) på formen

$$A T_{\cdot j} = \lambda_j T_{\cdot j} \qquad \forall j \in \underline{n}$$

eller ekvivalent

$$A T e_j = \lambda_j T e_j = T(\lambda_j e_j) \qquad \forall j \in \underline{n} \tag{2}$$

Enligt konstruktion av D kan vi skriva (2) på formen

$$A T e_j = T D_{\cdot j} = T D e_j \qquad \forall j \in \underline{n}$$

eller ekvivalent

$$(AT)_{\cdot j} = (TD)_{\cdot j} \qquad \forall j \in \underline{n}$$

Därmed är

$$AT = TD$$

och slutligen

$$T^{-1} A T = D \qquad \square$$

Beviset till (ii) $\Rightarrow$ (i) fås genom att läsa beviset till (i) $\Rightarrow$ (ii) baklänges, dvs. nerifrån upp!

Nu ska vi tillämpa Sats 2 !

Ex. 5 Operatorn f på $\mathbb{R}^2$ ges geometriskt som spegling i linjen $L: 3x+4y=0$.
Finn f:s matris A.

Lösning. Elementär metod. $A = \left(f(e_1) \mid f(e_2) \right)$, och $f(e_j)$ kan beräknas med geometriska resonemang.

Ny metod. $b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ är riktningsvektor för $L \Rightarrow Ab_1 = f(b_1) = b_1$

$b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ är normalvektor till $L \Rightarrow Ab_2 = f(b_2) = -b_2$

Därmed är b_1, b_2 en bas i $\mathbb{R}^2$ som består av egenvektorer till A. Enligt Sats 2 uppfyller

$$T = (b_1 \mid b_2) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

matrisekvationen

$$T^{-1}AT = D .$$

Alltså är

$$A = TDT^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix} .$$

Ex. 6 Givet $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, beräkna A^n för alla $n \geq 1$.

Lösning. Vi söker först en bas b i $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer till A, och sedan tillämpar vi Sats 2.

a) Finn A:s egenvärden. $0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -8 \\ & \lambda+1 & 0 \\ & & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)^2$

löses av $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

b) Finn en bas i $E(1)$ och i $E(-1)$.

$E(1) = N(I-A)$; $I - A = \begin{array}{c} \frac{1}{2}\cdot \\ \frac{1}{2}\cdot \\ \frac{1}{2}\cdot \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -8 \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$$E(1) = \text{span}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_1}.$$

$E(-1) = N(-I-A)$; $-I - A = -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_1 = x_2 - 4x_3$

Sätt $x_2 = s$, $x_3 = t$

$$E(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} s-4t \\ s \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_3} \right\}$$

(b_1, b_2, b_3) är en bas i $\mathbb{R}^3$ med $Ab_1 = b_1$, $Ab_2 = -b_2$, $Ab_3 = -b_3$.

c) Tillämpa Sats 2. $T = (b_1 | b_2 | b_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

uppfyller $\quad T^{-1}AT = D$, $\quad$ vilket medför

$$A = TDT^{-1}$$

$$A^2 = TD\cancel{T^{-1}}\cancel{T}DT^{-1} = TD^2T^{-1}$$

$$A^3 = TD\cancel{T^{-1}}\cancel{T}D\cancel{T^{-1}}\cancel{T}DT^{-1} = TD^3T^{-1}$$

$$\ldots\ldots$$

$$A^n = TD^nT^{-1} = T\begin{pmatrix} 1^n & & \\ & (-1)^n & \\ & & (-1)^n \end{pmatrix}T^{-1} \qquad \forall n \geq 1.$$

För jämna n är $D^n = I$ och därför $A^n = TIT^{-1} = TT^{-1} = I$.

För udda n är $D^n = D$ och därför $A^n = TDT^{-1} = A$.

Svar. $A^n = \begin{cases} A & \text{om } n \geq 1 \text{ är udda} \\ I & \text{om } n \geq 1 \text{ är jämn} \end{cases}$.

Man kan även tillämpa Sats 2 på vissa system av linjära differentialekvationer. Vi återkommer till detta ämne mot slutet av kursen.

Vi avrundar diagonaliseringsämnet med följande

Problem. Givet $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, avgör om A är diagonaliserbar eller inte.

Lösning. a) Beräkna A:s egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$. Vi vet att $0 \leq \ell \leq n$.

b) Bestäm $d_i := \dim E(\lambda_i)$. Då gäller alltid $\ell \leq \sum_{i=1}^{\ell} d_i \leq n$.

c) Om $\sum_{i=1}^{\ell} d_i < n$, då är A inte diagonaliserbar.

Om $\sum_{i=1}^{\ell} d_i = n$, då är A diagonaliserbar, och en bas i $\mathbb{R}^n$ som består av idel egenvektorer till A fås genom att plocka en bas $\underline{b}^i = (b_1^i, \ldots, b_{d_i}^i)$ i varje egenrum $E(\lambda_i)$ och lägga ihop dem till $\underline{b} = (\underline{b}^1, \ldots, \underline{b}^\ell)$.