F9

Inre produktrum

Påminnelse. I vektorrummet $\mathbb{R}^n$ kan vi idka geometri i meningen att vi kan beräkna längden av en vektor $v = (v_1, \dots, v_n)$ som

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} ,$$

samt vinkeln α mellan vektorer $v \neq 0$ och $w \neq 0$ enligt

$$\cos\alpha = \frac{v_1 w_1 + \dots + v_n w_n}{\|v\| \, \|w\|} .$$

Därmed kan vi även beräkna avståndet mellan två punkter x, y som

$$d(x,y) = \|y - x\| ,$$

samt avgöra om $v \neq 0$ och $w \neq 0$ är vinkelräta, då

$$v \perp w \iff \cos\alpha = 0 \iff v_1 w_1 + \dots + v_n w_n = 0 .$$

Målet för dagens föreläsning är att överföra dessa geometriska begrepp (såsom längd, vinkel, avstånd, ortogonalitet) från $\mathbb{R}^n$ till allmänna reella vektorrum! Hur kan man då gå till väga?

1) Observera först att längd och vinkel, och därmed även avstånd och ortogonalitet i $\mathbb{R}^n$ kan uttryckas enbart med hjälp av skalärprodukten

$$v \cdot w = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n ,$$

då

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} , \qquad \cos\alpha = \frac{v \cdot w}{\|v\| \, \|w\|}$$

$$d(x,y) = \|y - x\| , \qquad v \perp w \iff v \cdot w = 0 .$$

2) Så snart vi i ett allmänt reellt vektorrum V har "någonting som motsvarar skalärprodukten", då kan vi definiera längd, vinkel, avstånd, ortogonalitet i V analogt med 1).

3) Vad är då i V "någonting som motsvarar skalärprodukten"? För att komma underfund med det sållar vi fram <u>skalärproduktens grundläggande formella egenskaper</u>. Skalärprodukten är en avbildning

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v,w) \mapsto v \cdot w = \sum_i v_i w_i$$

med följande egenskaper:

(SP1)	$v \cdot w = w \cdot v$	symmetrisk
(SP2)	$(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$	additiv
(SP3)	$(cv) \cdot w = c(v \cdot w)$	homogen
(SP4)	$v \cdot v > 0 \quad \forall v \neq 0$	positivt definit

Om vi nu glömmer skalärproduktens <u>definition</u> $v \cdot w = v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n$ och istället enbart fokuserar på dess <u>egenskaper</u> (SP1) - (SP4), då har vi svaret på ovanstående fråga.

4) Låt V vara ett reellt vektorrum. En <u>inre produkt</u> på V (även kallad <u>skalärprodukt</u> på V) är en avbildning

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v,w) \mapsto \langle v,w \rangle$$

med följande egenskaper:

(IP1)	$\langle v,w \rangle = \langle w,v \rangle$	symmetrisk
(IP2)	$\langle u+v, w \rangle = \langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle$	additiv
(IP3)	$\langle cv, w \rangle = c\langle v,w \rangle$	homogen
(IP4)	$\langle v,v \rangle > 0 \quad \forall v \neq 0$	positivt definit

En massa exempel på inre produkter på $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$ får man med hjälp av följande

Sats 1. Varje matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bestämmer en avbildning

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \langle x,y\rangle = x^T A y = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, x_i y_j$$

som uppfyller (IP2) och (IP3). Om matrisen A är symmetrisk, då är avbildningen

$\langle x,y\rangle = x^T A y$ symmetrisk.

Ex. 1 Matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ bestämmer avbildningen $\langle x,y\rangle = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 5x_2y_2$

Bevis. (IP2) $\langle x+y, z\rangle = (x+y)^T A z = (x^T + y^T) A z$

$$= x^T A z + y^T A z = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$$

(IP3) $\langle cx, y\rangle = (cx)^T A y = c(x^T) A y = c\langle x,y\rangle$

(IP1) Om $A = A^T$, då är

$$\langle x,y\rangle = x^T A y \overset{!}{=} (x^T A y)^T = y^T A^T (x^T)^T = y^T A x = \langle y,x\rangle. \quad \square$$

För varje symmetrisk matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gäller därmed att

$\langle x,y\rangle = x^T A y$ är en inre produkt på $\mathbb{R}^n$ omm $\langle x,x\rangle > 0 \quad \forall x \neq 0$

dvs. omm $\sum A_{ij}\, x_i x_j > 0 \quad \forall x \neq 0$

Sådana symmetriska matriser kallas positivt definita. Vi tittar på några exempel.

Ex. 2 För $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ är $\langle x,y\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$ positivt definit, då

$$\langle x,x\rangle = 2x_1^2 + 3x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Ex. 3 För $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ är $\langle x,y\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$ positivt definit, då

$$\begin{aligned} \langle x,x\rangle &= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 \\ &= x_1^2 + (x_1+x_2)^2 + 2x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0 \end{aligned}$$

Ex. 4 För varje diagonalmatris $A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$ är

$$\langle x,y\rangle = a_1x_1y_1 + \dots + a_nx_ny_n \quad , \text{ alltså}$$

$$\langle x,x\rangle = a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2 \; .$$

Om alla $a_i > 0$, då är A positivt definit, då $\sum a_ix_i^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$.

Om något $a_i \leq 0$, då är A ej positivt definit, då $\langle e_i, e_i\rangle = a_i \leq 0$.

Sammanfattning. En diagonalmatris A bestämmer en inre produkt $\langle x,y\rangle = x^TAy = \sum_{i=1}^{n} a_ix_iy_i$ på $\mathbb{R}^n$ omm alla diagonalelement $a_i > 0$. I så fall kallas

$$\langle x,y\rangle = \sum a_ix_iy_i$$

för den viktade inre produkten, med vikterna $a_1, \dots, a_n$. I fall $A = I$ återfås standardskalärprodukten

$$\langle x,y\rangle = \sum x_iy_i = x \cdot y \, .$$

Ex.5 För $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ är $\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1$

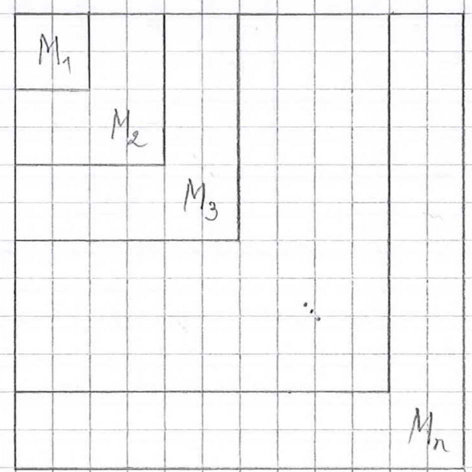
positivt definit, då
$$\langle x, x \rangle = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$
$$= (x_1+x_2)^2 + (x_1+x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0 \quad \forall x$$

och $\langle x, x \rangle = 0$
$$\Rightarrow \quad x_1 + x_2 = x_1 + x_3 = x_2 = x_3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = 0$$

Måste man alltid kvadratkomplettera för att avgöra om en symmetrisk matris är positivt definit?
Nej, det finns faktiskt en enkel alternativ metod som beskrivs i följande

Sats 2. En symmetrisk matris A är positivt definit omm alla dess huvudminorer är positiva.

Med huvudminorerna (= principal minors) till A menas underdeterminanterna $M_1, M_2, \ldots, M_n$ till A av formen



I Ex.5 är
$$M_1 = |2| = 2 > 0$$
$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$
$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & 2 & \boxed{0} \\ -3 & -2 & \boxed{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$\underset{\text{Sats2}}{\Rightarrow}$ A är positivt definit.

Ex. 6 $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3 \end{pmatrix}$ har huvudminorerna $M_1 = |2| = 2$ och $M_2 = \det(A) = 0$.

Enligt Sats 2 är A inte positivt definit, dvs. $x^T A x = 0$ gäller för något $x \neq 0$.

Vi verifierar detta: $\quad x^T A x = 2x_1^2 + 2\sqrt{6}\, x_1 x_2 + 3 x_2^2$

$$= 2\left(x_1^2 + \sqrt{6}\, x_1 x_2 + \frac{3}{2} x_2^2\right)$$

$$= 2\left(x_1 + \frac{\sqrt{6}}{2} x_2\right)^2 = 0 \quad \text{för } x = \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ exvis.}$$

Ex. 7 $\quad$ Mängden $\mathbb{R}^{[a,b]} = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \}$ av alla reellvärda funktioner som är definierade på intervallet $[a,b]$ är ett reellt vektorrum, med värdevis definierade räknesätt. Delmängden

$$C[a,b] := \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ är kontinuerlig} \} \subset \mathbb{R}^{[a,b]}$$

är ett delrum. Avbildningen

$$C[a,b] \times C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (f,g) \mapsto \langle f,g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

uppfyller (IP1) – (IP4) och är därmed en inre produkt på $C[a,b]$.

Vi verifierar (IP4). $\quad \langle f,f \rangle = \int_a^b \underbrace{f^2(x)}_{\geq 0}\,dx \geq 0 \quad \forall f \in C[a,b]$, och

$$\langle f,f \rangle = 0 \;\Rightarrow\; \int_a^b \underbrace{f^2(x)}_{\geq 0}\,dx = 0$$

$$\Rightarrow\; f^2(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow\; f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow\; f = 0$$

$\square$

<u>Terminologi</u>. Ett <u>inre produktrum</u> är ett reellt vektorrum V, tillsammans med en inre produkt $\langle v,w\rangle$.

Ett <u>euklidiskt rum</u> är ett inre produktrum av <u>ändlig dimension</u>.

Skalärprodukten $\langle v,w\rangle = v\cdot w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$ på $\mathbb{R}^n$ kallas för <u>standardskalärprodukten</u>,

och det euklidiska rummet $\mathbb{R}^n$, tillsammans med standardskalärprodukten $\langle v,w\rangle = v\cdot w$, betecknas med $\mathbb{E}^n$.

<u>Anmärkning</u>. I varje inre produktrum V gäller

$$\langle 0,0\rangle = \langle 0+0,0\rangle \underset{(IP2)}{=} \langle 0,0\rangle + \langle 0,0\rangle \Rightarrow \langle 0,0\rangle = 0 .$$

Tillsammans med (IP4) medför detta

$$(IP4') \quad \begin{cases} \langle v,v\rangle \geq 0 & \forall v\in V \text{ och} \\ \langle v,v\rangle = 0 \Rightarrow v = 0 \end{cases}$$

Omvänd medför (IP4') förstås (IP4). Axiomsystemen (IP1) - (IP4) och (IP1) - (IP3), (IP4') är därför ekvivalenta.