Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Ernst Dieterich

Civilingenjörsprogrammen F och W
Kandidatprogrammet i matematik
Lärarprogrammet

Svar på tentan 2011–03–09

1. U_1 och U_2 är delrum, medan U_3 inte är delrum; $\dim(U_1) = 3$, $\dim(U_2) = 8$.

2. (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$

(c) $p = 10X - 9X^2 + 2X^3$

3. (a) $(1, X)$ är en bas i $\ker(f)$, och $(1 - X^2, X - X^3)$ är en bas i $\mathrm{im}(f)$.

(b) **Dimensionssatsen.** *För varje linjär avbildning $f : V \to W$ gäller identiteten*

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(V).$$

För uppgiftens linjära avbildning $f : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ är $\dim(\ker(f)) = 2$, $\dim(\mathrm{im}(f)) = 2$, och $\dim(\mathcal{P}_3) = 4$.

4. $y = e^{3x} + e^{-4x}$

5. Ja.

6. $d(w, U) = \frac{\sqrt{70}}{5}$, och $u = \frac{1}{5}(4\ 3\ 2\ 1)^T$.

7. Y är en tvåmantlad rotationshyperboloid. Minsta avståndet $d(Y, 0) = 1$ antas i punkterna $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)$.

8. (a) A kallas *diagonaliserbar* om det finns en inverterbar matris T så att $T^{-1}AT$ är en diagonalmatris.

(b) A kallas *ortogonalt diagonaliserbar* om det finns en ortogonal matris S så att $S^{-1}AS$ är en diagonalmatris.

(c) **Spektralsatsen.** *Om A är symmetrisk, då är A ortogonalt diagonaliserbar.*

(d) Nej.

(e) $A = 0$

Lösningar till tentamen 2011-03-09

1. (a) $-0^T = 0 \Rightarrow 0 \in \mathcal{U}_1$

$$A, B \in \mathcal{U}_1 \Rightarrow -(A+B)^T = -A^T - B^T = A + B \Rightarrow A+B \in \mathcal{U}_1$$

$$c \in \mathbb{R},\ A \in \mathcal{U}_1 \Rightarrow -(cA)^T = c(-A^T) = cA \Rightarrow cA \in \mathcal{U}_1$$

Alltså är $\mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$ ett delrum.

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_3} \right\}$$

$\underline{A} = (A_1, A_2, A_3)$ är linjärt oberoende, alltså en bas i $\mathcal{U}_1$, alltså är $\dim(\mathcal{U}_1) = 3$.

(b) Avbildningen $f : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$, $f(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ är linjär och surjektiv.

Obs. att $\mathcal{U}_2 = \ker(f)$. Alltså är $\mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$ ett delrum. Enligt dimensionsatsen är

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{U}_2) = \dim(\ker(f)) &= \dim(\mathbb{R}^{3\times 3}) - \dim(\operatorname{im}(f)) \\ &= \dim(\mathbb{R}^{3\times 3}) - \dim(\mathbb{R}) \\ &= 9 - 1 = 8. \end{aligned}$$

(c) Då $0 \notin \mathcal{U}_3$ är $\mathcal{U}_3 \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$ inte ett delrum.

2. (a) $$f(p+q) = \begin{pmatrix} (p+q)(0) \\ (p+q)(1) \\ (p+q)(2) \\ (p+q)(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(0)+q(0) \\ p(1)+q(1) \\ p(2)+q(2) \\ p(3)+q(3) \end{pmatrix} = f(p)+f(q)$$

$$f(cp) = \begin{pmatrix} (cp)(0) \\ (cp)(1) \\ (cp)(2) \\ (cp)(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,p(0) \\ cp(1) \\ cp(2) \\ cp(3) \end{pmatrix} = c\,f(p)$$

(b) $$A = [f]_{\underline{e}\underline{X}} = \left([f(1)]_{\underline{e}} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, [f(X^3)]_{\underline{e}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

(c) $$f(p) = (0,3,0,3) \iff [f(p)]_{\underline{e}} = [(0,3,0,3)]_{\underline{e}}$$

$$\iff [f]_{\underline{e}\underline{X}} [p]_{\underline{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\iff A\,[p]_{\underline{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\iff [p]_{\underline{X}} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\iff [p]_{\underline{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & 18 & -9 & 2 \\ 6 & -15 & 12 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\iff [p]_{\underline{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff p = 10X - 9X^2 + 2X^3$$

3. (a) f:s matris i standardbasen $\underline{X} = (1, X, X^2, X^3)$ är

$$A = [f]_{\underline{X}} = \left([f(1)]_{\underline{X}} \middle| \ldots \middle| [f(X^3)]_{\underline{X}} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad \text{då}$$

$$f(1) = 0, \quad f(X) = 0, \quad f(X^2) = 2 - 2X^2, \quad f(X^3) = 6X - 6X^3.$$

För alla $p \in \mathcal{P}_3$ gäller att

$$p \in \ker(f) \iff f(p) = 0 \iff [f(p)]_{\underline{X}} = [0]_{\underline{X}}$$

$$\iff A[p]_{\underline{X}} = 0$$

$$\iff [p]_{\underline{X}} \in N(A) = N\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\iff p \in \operatorname{span}\{1, X\} = \mathcal{P}_1$$

Alltså är $\ker(f) = \mathcal{P}_1$, och $(1, X)$ är en bas i $\ker(f)$.

För alla $q \in \mathcal{P}_3$ gäller att

$$q \in \operatorname{im}(f) \iff f(p) = q \quad \text{för något } p \in \mathcal{P}_3$$

$$\iff A[p]_{\underline{X}} = [q]_{\underline{X}} \quad \text{för något } p \in \mathcal{P}_3$$

$$\iff [q]_{\underline{X}} \in K(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\iff q \in \operatorname{span}\{1 - X^2, X - X^3\}$$

Alltså är $\operatorname{im}(f) = \operatorname{span}\{1 - X^2, X - X^3\}$. Dessutom är paret $(1 - X^2, X - X^3)$ linjärt oberoende, alltså en bas i $\operatorname{im}(f)$.

(b) <u>Dimensionssatsen.</u> <u>För varje linjär avbildning</u> $f : V \to W$ <u>är</u>

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(V) .$$

För uppgiftens linjära avbildning $f : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ är

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)) \underset{(a)}{=} 2 + 2 = 4 = \dim(\mathcal{P}_3) ,$$

vilket stämmer överens med dimensionssatsen.

4. Om y löser differentialekvationen

$$y'' + y' - 12y = 0 \qquad (1) ,$$

då uppfyller $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ ekvationerna $\begin{cases} y_1' = y' = y_2 \\ y_2' = y'' = 12y - y' = 12y_1 - y_2 \end{cases}$.

Om $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ löser systemet

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 12y_1 - y_2 \end{cases} \qquad (2) ,$$

då uppfyller $y = y_1$ ekvationen

$$y'' + y' - 12y = y_1'' + y_1' - 12y_1 = y_2' + y_2 - 12y_1 = 0 .$$

<u>Alltså gäller att</u> y <u>löser</u> (1) <u>omm</u> $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ <u>löser</u> (2). För att lösa systemet (2) skriver vi det på matrisform

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \qquad (2)$$

med $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, och söker diagonalisera A.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -12 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 12$$ har rötterna $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = -4$.

Dessa är A:s egenvärden.

$$E(3) = N(3I - A) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}, \quad \text{då } 3I - A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -12 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E(-4) = N(-4I - A) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}, \quad \text{då } -4I - A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -12 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alltså är $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ en bas i $\mathbb{R}^2$ med $Ab_1 = 3b_1$ och $Ab_2 = -4b_2$.

Matriserna $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ uppfyller då $T^{-1}AT = D$.

Med substitutionen $y = Tz$ och $y' = Tz'$ gäller nu att

$$y' = Ay \iff z' = Dz \qquad (2)_D$$

Den allmänna lösningen till $(2)_D$ är

$$\begin{cases} z_1 = c_1 e^{3x} \\ z_2 = c_2 e^{-4x} \end{cases}, \quad \text{där } (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Således är den allmänna lösningen till (2)

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - z_2 = c_1 e^{3x} - c_2 e^{-4x} \\ y_2 = 3z_1 + 4z_2 = 3c_1 e^{3x} + 4c_2 e^{-4x} \end{cases}, \quad \text{där } (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2,$$

och den allmänna lösningen till (1) är då

$$y = c_1 e^{3x} - c_2 e^{-4x}, \qquad \text{där } (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Denna uppfyller begynnelsevillkoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - c_2 \\ 3c_1 + 4c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

omm

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Svar. $y = e^{3x} + e^{-4x}$.

5. Med $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ och $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ kan olikheten i fråga skrivas på matrisform

$$(x^T A y)^2 \leq (x^T A x)(y^T A y).$$

Matrisen A är symmetrisk och positivt definit, då dess huvudminorer $|1| = 1$ och $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$ är positiva. Alltså är avbildningen

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \langle x,y \rangle = x^T A y$$

en inre produkt på $\mathbb{R}^2$. Således gäller för alla $x, y \in \mathbb{R}^2$ Cauchy-Schwarz olikheten

$$|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

$$\Rightarrow \quad \langle x,y \rangle^2 \leq \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle$$

$$\Rightarrow \quad (x^T A y)^2 \leq (x^T A x)(y^T A y) \qquad \square$$

Svar. Ja.

6. Vi bestämmer först en bas i $\mathcal{U} = K(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \underset{k}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{visar att} \quad \mathcal{U} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dessutom är $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ linjärt oberoende. Alltså är $\underline{a} = (a_1, a_2)$ en bas i $\mathcal{U}$.

Vi beräknar $\underline{b} = GS(\underline{a})$. $\quad b_1 = \dfrac{a_1}{\|a_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

$$b_2 = \frac{a_2 - (a_2 \cdot b_1)\, b_1}{\| \cdots \|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{14}}\, 6\, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\| \cdots \|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\| \cdots \|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 4/7 \\ 1/7 \\ -2/7 \end{pmatrix}}{\| \cdots \|} =$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\| \cdots \|} = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Då $\underline{b} = (b_1, b_2)$ är en on-bas i $\mathcal{U}$ kan vi beräkna $\text{proj}_{\mathcal{U}}\, w$ enligt formeln

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}\, w = (w \cdot b_1)\, b_1 + (w \cdot b_2)\, b_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}\, 2\, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{70}}\, 8\, \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{5}{35} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{4}{35} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 28 \\ 21 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Minsta avståndet av w från $\mathcal{U}$ antas i $u = \text{proj}_{\mathcal{U}}\, w = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, och beräknas enligt

$$d(w, \mathcal{U}) = \| w - \text{proj}_{\mathcal{U}}\, w \| = \left\| \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{5} \sqrt{16 + 49 + 4 + 1} = \frac{\sqrt{70}}{5}.$$

Svar. $d(w, U) = \frac{\sqrt{70}}{5}$ och $u = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}$.

7. Vi skriver $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ istället för (x,y,z). Vänsterledet i Y:s ekvation är en kvadratisk form

$$q(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = x^T A x \ , \quad \text{för } A = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

Den symmetriska matrisen A är enligt spektralsatsen ortogonalt diagonaliserbar. Vi beräknar A:s egenvärden.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & -2\\ -1 & \lambda+1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda+1 & -\lambda-2 & -2\\ -1 & \lambda+2 & -2\\ -2 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & -2\\ -2 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & -2\\ \lambda & 0 & -4\\ -2 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda & -4\\ -2 & \lambda-2\end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda-8)$$

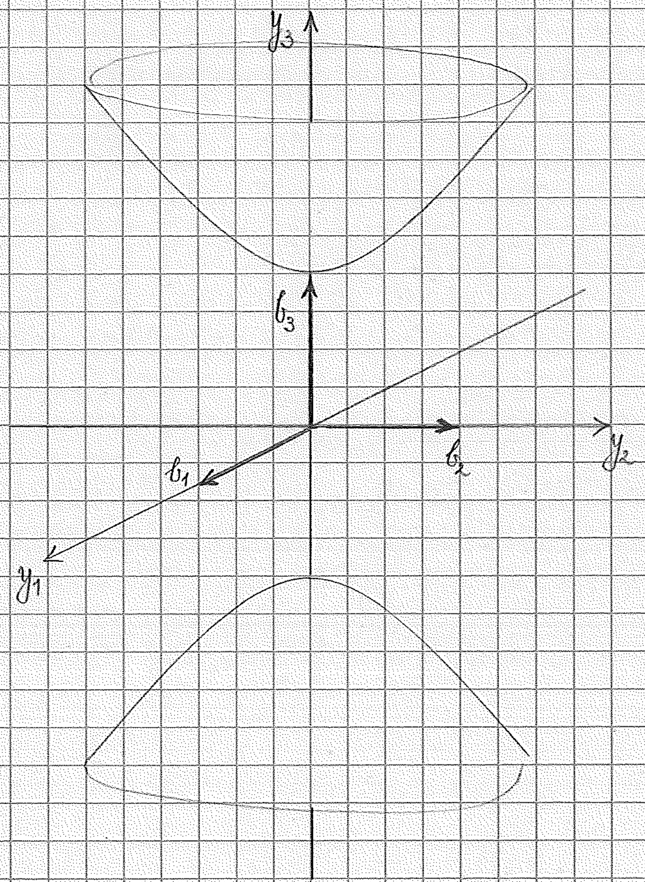
har rötterna $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 4$. Dessa är A:s egenvärden. Om (b_1, b_2) är en on-bas i $E(-2)$ och $b_3 \in E(4)$ är normerad, då är $b = (b_1, b_2, b_3)$ en on-bas i $\mathbb{E}^3$ med $Ab_1 = -2b_1$, $Ab_2 = -2b_2$, $Ab_3 = 4b_3$. Således är matrisen $S = (b_1 | b_2 | b_3)$ ortogonal, och uppfyller $S^TAS = D = \begin{pmatrix}-2 & & \\ & -2 & \\ & & 4\end{pmatrix}$. Till följd av detta gäller

$$q(x) = -2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 \qquad \forall\ x = \sum_{i=1}^{3} y_i b_i \ .$$

Därmed är
$$x \in Y \iff q(x) = 4$$
$$\iff -2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 = 4$$
$$\iff y_1^2 + y_2^2 = 2(y_3^2 - 1)$$

$Y \cap \{y_1 = 0\}$: $\quad \left(y_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} y_2\right)\left(y_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} y_2\right) = 1$ är en hyperbel i (y_2, y_3)-planet, med asymptoterna $y_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} y_2$.

$$Y \cap \{y_3 = c\} = \begin{cases} \emptyset & \text{om } |c| < 1 \\ \pm b_3 & \text{om } |c| = 1 \\ \text{cirkeln i planet } y_3 = c \text{ med radie} \\ \sqrt{2(c^2-1)} \text{ och centrum } cb_3 & \text{om } |c| > 1 \end{cases}$$



Y är en tvåmantlad rotationshyperboloid. Minsta avståndet är $d(Y, 0) = 1$ och antas i $\pm b_3$, då följande gäller för alla $x = \sum y_i b_i \in Y$:

$$\|x\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \underbrace{\left(-\frac{1}{2} y_1^2 - \frac{1}{2} y_2^2 + y_3^2\right)}_{1} + \frac{3}{2} y_1^2 + \frac{3}{2} y_2^2 \geq 1,$$

med likhet omm $y_1 = y_2 = 0$ och $y_3 = \pm 1$. Återstår att finna $\pm b_3$.

$$E(4) = N(4I-A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}, \text{ då}$$

$$4I-A = \begin{pmatrix}5&-1&-2\\-1&5&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&5&-2\\5&-1&-2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&6&-3\\0&-6&3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&-1/2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Alltså duger $b_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

Svar. Y är en tvåmantlad rotationshyperboloid. Minsta avståndet från origo är 1, och antas i punkterna $\pm \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

8. (a) A kallas diagonaliserbar om det finns en inverterbar matris T så att $T^{-1}AT$ är en diagonalmatris.

(b) A kallas ortogonalt diagonaliserbar om det finns en ortogonal matris S så att $S^{-1}AS$ är en diagonalmatris.

(c) Spektralsatsen. Om A är symmetrisk, då är A ortogonalt diagonaliserbar.

(d) Nej. Bevis. Om A är ortogonalt diagonaliserbar, då gäller $S^TAS = D$ för en ortogonal matris S och en diagonalmatris D. Alltså är $A = SDS^T$ och

$$A^T = (SDS^T)^T = SDS^T = A, \quad \text{dvs. } A \text{ är symmetrisk.}$$

(e) Enligt spektralsatsen finns det S ortogonal och $D = \begin{pmatrix}d_1&&\\&\ddots&\\&&d_n\end{pmatrix}$ så att $S^TAS = D$.

$$D^m = (S^TAS)^m = S^TA^mS = S^TOS = 0 \Rightarrow D = 0$$
$$\Rightarrow A = SDS^T = SOS^T = 0.$$