Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Ernst Dieterich

Civilingenjörsprogrammen F och W
Kandidatprogrammet i matematik
Lärarprogrammet

Prov i matematik
Linjär algebra II, 5hp
2011–03–09

Skrivtid: 14.00–19.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Den som är godkänd på duggan får hoppa över första uppgiften.

1. Vilka av de följande delmängderna $U_i \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$ är delrum? Ange $\dim(U_i)$ ifall ett delrum föreligger. Alla svar skall motiveras!

$$\begin{aligned} U_1 &= \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A = -A^T\}, \\ U_2 &= \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0\}, \\ U_3 &= \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid x^T A x > 0 \text{ för alla nollskilda } x \in \mathbb{R}^{3\times 1}\}. \end{aligned}$$

2. Utvärderingsavbildningen $f : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^4$ definieras enligt $f(p) = (p(0), p(1), p(2), p(3))$.

(a) Visa att f är linjär.

(b) Ange f:s matris $A = [f]_{\underline{e},\underline{X}}$ i standardbaserna $\underline{X} = (1, X, X^2, X^3)$ i $\mathcal{P}_3$ och $\underline{e}$ i $\mathbb{R}^4$.

(c) Finn ett polynom $p \in \mathcal{P}_3$ så att $f(p) = (0, 3, 0, 3)$.

3. Den linjära operatorn $f : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definieras enligt $f(p) = (1 - X^2)p''$.

(a) Finn en bas i f:s kärna $\ker(f)$ och en bas i f:s bild $\mathrm{im}(f)$.
(Kursbokens terminologi: kärna = kernel, bild = range.)

(b) Vad säger *dimensionssatsen* om en linjär avbildning $f : V \to W$? Återge påståendet, och kontrollera om ditt svar på (a) stämmer överens med detta.

4. Lös differentialekvationen $y'' + y' - 12y = 0$, med begynnelsevillkoren $y(0) = 2$ och $y'(0) = -1$.

Var god vänd!

5. Är det sant att olikheten

$$(x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2)^2 \;\leq\; (x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2)(y_1^2 + 4y_1y_2 + 5y_2^2)$$

gäller för alla reella tal x_1, x_2, y_1, y_2? Bevis eller motexempel!

6. Delrummet $U \subset \mathbb{E}^4$ definieras som kolonnrum till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} .$$

Bestäm det minsta avståndet av vektorn $w = (0\ 2\ 0\ 0)^T$ från U, samt ange den vektor $u \in U$ där minsta avståndet antas.

7. Ytan Y i $\mathbb{E}^3$ ges som lösningsmängd till ekvationen

$$-x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy + 4xz + 4yz = 4 .$$

Bestäm ytans typ, ytans minsta avstånd från origo, samt de punkter på ytan där minsta avståndet antas. (Dessa punkter skall anges i standardbasen.)

8. Låt A vara en reell kvadratisk matris.

(a) Vad menas med påståendet att A är *diagonaliserbar*? Förklara terminologin!

(b) Vad menas med påståendet att A är *ortogonalt diagonaliserbar*? Förklara terminologin!

(c) Vad säger *spektralsatsen* om ortogonal diagonaliserbarhet av A? Återge påståendet!

(d) Finns det någon ickesymmetrisk matris A som är ortogonalt diagonaliserbar? Exempel eller motbevis!

(e) Antag att A är symmetrisk och $A^m = 0$ för något $m \geq 2$. Bestäm A!

LYCKA TILL!