R1 <u>Lösningar till första tentamensförberedande uppgiften</u>

1. Delmängden $S \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$ består av alla matriser $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ som uppfyller

$$A^T = A \iff (A^T)_{ij} = A_{ij} \quad \forall ij$$

$$\iff A_{ji} = A_{ij} \quad \forall ij$$

$$\iff A_{12} = A_{21} \text{ och } A_{13} = A_{31} \text{ och } A_{23} = A_{32}$$

$$\iff A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \text{ för vissa } a, \dots, f \in \mathbb{R}.$$

(a) (DR1) För $a = \dots = f = 0$ fås $0 \in S$.

(DR2) Om $A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$ och $A' = \begin{pmatrix} a' & d' & e' \\ d' & b' & f' \\ e' & f' & c' \end{pmatrix}$ är matriser i S, då är även

$$A + A' = \begin{pmatrix} a+a' & d+d' & e+e' \\ d+d' & b+b' & f+f' \\ e+e' & f+f' & c+c' \end{pmatrix} \in S.$$

(DR3) Om $r \in \mathbb{R}$ och $A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \in S$, då är även

$$rA = \begin{pmatrix} ra & rd & re \\ rd & rb & rf \\ re & rf & rc \end{pmatrix} \in S.$$

Delmängden $S \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$ är ett delrum, då (DR1) – (DR3) är uppfyllda.

(b) Då varje matris $A \in S$ kan skrivas

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

$$= a\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{B_1} + b\underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix}}_{B_2} + c\underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{B_3} + d\underbrace{\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & \end{bmatrix}}_{B_4} + e\underbrace{\begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ 1 & & \end{bmatrix}}_{B_5} + f\underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix}}_{B_6},$$

har vi hittat en följd $\underline{B} = (B_1, \dots, B_6)$ i S som genererar (= spänner upp) S.

Dessutom är $\underline{B}$ linjärt oberoende:

$$c_1 B_1 + \dots + c_6 B_6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 & c_4 & c_5 \\ c_4 & c_2 & c_6 \\ c_5 & c_6 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = \dots = c_6 = 0 .$$

Följden $\underline{B}$ är en bas i S, då den är genererande och linjärt oberoende.

(c) $\dim(S)$ = längden av basen $\underline{B}$ = 6 .

2. (a) Matrisföljden $\underline{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ är en bas i $\mathbb{R}^{2\times 2}$ om ekvationen

$$c_1 B_1 + \dots + c_4 B_4 = 0 \qquad (*)$$

endast har den triviala lösningen $c_1 = \dots = c_4 = 0$, och ekvationen

$$c_1 B_1 + \dots + c_4 B_4 = W \qquad (*_W)$$

är lösbar för varje $W \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Vänsterledet i $(*) = (*_0)$ och i $(*_W)$ har formen

$$c_1\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2c_1 + c_2 + c_3 + c_4 & c_1 + 2c_2 + c_3 + c_4\\ c_1 + c_2 + 2c_3 + c_4 & c_1 + c_2 + c_3 + 2c_4\end{pmatrix}$$

För varje $W = \begin{pmatrix}w_{11} & w_{12}\\ w_{21} & w_{22}\end{pmatrix}$ kan $(*_W)$ därmed skrivas som ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = w_{11}\\ c_1 + 2c_2 + c_3 + c_4 = w_{12}\\ c_1 + c_2 + 2c_3 + c_4 = w_{21}\\ c_1 + c_2 + c_3 + 2c_4 = w_{22}\end{cases} \qquad (*_W),$$

eller koncist som matrisekvation

$$A\,c = w \qquad (*_W),$$

där

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix}w_{11}\\ w_{12}\\ w_{21}\\ w_{22}\end{pmatrix}.$$

Låt oss beräkna determinanten av A.

$$\det(A) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}5 & 5 & 5 & 5\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{vmatrix} = 5\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}-1 & & & \end{array}\\ \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{vmatrix}\end{array} =$$

$$= 5\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 5 \cdot 1 = 5$$

Därmed kan vi slutföra (a) så här: $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ är inverterbar $\Rightarrow$

$A\,c = 0 \quad (*)$ har den entydiga lösningen $c = A^{-1}0 = 0$, och

$A\,c = w \quad (*_W)$ har den entydiga lösningen $c = A^{-1}w$ för alla $W \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Koordinatvektorn $(V)_{\underline{B}} = (c_1, \ldots, c_4)$ är den entydiga lösningen till ekvationen

$$c_1 B_1 + \ldots + c_4 B_4 = V \qquad (*_V)$$

Enligt (a) är $(*_V)$ ett linjärt ekvationssystem med totalmatris

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & & & -1 \\ & 1 & -1 & & -1 \\ & & 1 & -1 & -1 \\ & & 3 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \frac{1}{5}\cdot\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & & & -1 \\ & 1 & -1 & & -1 \\ & & 1 & -1 & -1 \\ & & & 5 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & & & -1 \\ & 1 & -1 & & -1 \\ & & 1 & -1 & -1 \\ & & & 1 & 9/5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & & & -1 \\ & 1 & -1 & & -1 \\ & & 1 & 0 & 4/5 \\ & & & 1 & 9/5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & & & -1 \\ & 1 & 0 & & -1/5 \\ & & 1 & & 4/5 \\ & & & 1 & 9/5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & -6/5 \\ & 1 & & & -1/5 \\ & & 1 & & 4/5 \\ & & & 1 & 9/5 \end{array}\right)$$

<u>Svar</u> (b). $(V)_{\underline{B}} = \left(-\frac{6}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

3. (a) $A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & 4 & 8 & 2 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$T_{\cdot 2}, T_{\cdot 4}$ är T:s pivotkolonner $\Rightarrow$ $\underline{a} = (A_{\cdot 2}, A_{\cdot 4})$ är en bas i $K(A)$

(b) $[A_{\cdot 5}]_{\underline{a}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, då $c_1 A_{\cdot 2} + c_2 A_{\cdot 4} = A_{\cdot 5}$ är ett linjärt ekvationssystem med totalmatris $(A_{\cdot 2}\ A_{\cdot 4}\ A_{\cdot 5}) \underset{\text{s.o.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & & 4 \\ & 1 & 3 \\ & & 0 \end{pmatrix}$

(c) Nollrummet $N(A)$ är lösningsmängden till det linjära ekvationssystemet $Ax = 0$.

Dess totalmatris $(A \mid 0)$ är enligt (a) radekvivalent med

$$(T \mid 0) = \left(\begin{array}{ccccc|c} & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ & & & 1 & 3 & 0 \\ & & & & & 0 \end{array}\right),$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

vilket svarar mot ekvationssystemet

$$\begin{cases} 0x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_5 = 0 \\ 0x_1 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_2 = -0x_1 - 2x_3 - 4x_5 \\ x_4 = -0x_1 - 3x_5 \end{cases}$$

Sätt $x_1 = s$, $x_3 = t$, $x_5 = u$, där $s, t, u \in \mathbb{R}$. Den allmänna kolonnen i $N(A)$ blir då

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -2t - 4u \\ t \\ -3u \\ u \end{pmatrix} = s\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_1} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_2} + u\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_3}$$

Alltså är $N(A) = \operatorname{span}\{b_1, b_2, b_3\}$. Dessutom är (b_1, b_2, b_3) linjärt oberoende:

$$s b_1 + t b_2 + u b_3 = 0 \underset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} s = t = u = 0.$$

Därmed är (b_1, b_2, b_3) en bas i $N(A)$.

(d) $$\begin{aligned} \dim(R(A)) &= \text{radrang}(A) \\ &= \text{antalet nollskilda rader i } T \\ &= 2. \end{aligned}$$

4. Med $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ är $f(x) = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Ax$.

f beskriver en projektion omm $\dim(E_A(1)) = 2$ och $\dim(E_A(0)) = 1$.

I så fall är $P = E_A(1)$ och $L = E_A(0)$. (Motivera med figur.)

$E(1) = N(I - A)$. $I - A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ svarar mot $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

Sätt $x_2 = s$, $x_3 = t$.

$$E(1) = \left\{ \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} \middle| s,t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_2} \right\}.$$

Dessutom är (b_1, b_2) lo. Alltså är (b_1, b_2) en bas i $E(1)$. Alltså är $\dim(E(1)) = 2$.

$E(0) = N(-A)$. $-A \sim 3A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim -1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ svarar mot $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

Sätt $x_3 = t$.

$$E(0) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_3} \right\}.$$

Dessutom är b_3 lo. Alltså är b_3 en bas i $E(0)$. Alltså är $\dim(E(0)) = 1$.

Därmed är f en projektion på planet $P = E(1)$, parallellt med linjen $L = E(0)$.

Som <u>normalvektor</u> till P duger

$$n = b_1 \times b_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & \\ & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1, 1, 1) \overset{!}{=} b_3$$

Som <u>riktningsvektor</u> för L duger $b_3 = (1, 1, 1)$.

Eftersom både P och L går genom origo, beskrivs de av ekvationerna

$P: \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$L: \quad (x_1, x_2, x_3) = t(1, 1, 1), \quad$ där $t \in \mathbb{R}$.

Obs. att f faktiskt är den <u>ortogonala</u> projektionen på P.