R2 Lösningar till andra tentamensförberedande uppgiften

1. Vi skriver $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ och $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ som kolonner. Då gäller

$$\langle x, y \rangle = x^T A y \qquad \text{för} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & b & 5 \end{pmatrix}.$$

Om $a \neq b$, då är matrisen A inte symmetrisk, och avbildningen $\langle , \rangle$ är då inte heller symmetrisk, alltså inte en inre produkt:

$$\langle e_2, e_3 \rangle = a \neq b = \langle e_3, e_2 \rangle$$

Om $a = b$, då är matrisen A symmetrisk. Enligt F9 är avbildningen $\langle , \rangle$ då symmetrisk, additiv, och homogen. Den är en inre produkt omm den är positivt definit, vilket inträffar omm alla huvudminorer är positiva.

$$M_1 = |1| = 1 > 0$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a-1 \\ 1 & a-1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ a-1 & 4 \end{vmatrix} = 4-(a-1)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-1)^2 < 4$$

$$\Leftrightarrow \quad |a-1| < 2$$

$$\Leftrightarrow \quad -2 < a-1 < 2$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 < a < 3 \quad .$$

<u>Svar.</u> $a = b$ <u>och</u> $-1 < a < 3$.

2. Vi försöker tolka den påstådda olikheten som ett specialfall till CS-olikhet

$$\langle u, v \rangle^2 \le \|u\|^2 \|v\|^2 ,$$

vilken som bekant gäller för alla vektorer u, v i ett inre produktrum $V = (V, \langle\, \rangle)$.
Jämför man högerleden, så kan man försöka sätta

$$\begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v , \quad \text{där alltså } u, v \in \mathbb{R}^2 .$$

Därmed blir vänsterledet

$$\left(2u_1v_1 + 3u_2v_2 + u_1v_2 + u_2v_1\right)^2 = \langle u, v \rangle^2$$

om vi dessutom sätter

$$\langle u, v \rangle := 2u_1v_1 + 3u_2v_2 + u_1v_2 + u_2v_1 ,$$

och mycket riktigt blir då högerledet

$$\begin{aligned} \|u\|^2 \|v\|^2 &= \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \\ &= \left(2u_1^2 + 3u_2^2 + 2u_1u_2\right)\left(2v_1^2 + 3v_2^2 + 2v_1v_2\right) \\ &= \left(2w^2 + 3x^2 + 2wx\right)\left(2y^2 + 3z^2 + 2yz\right) . \end{aligned}$$

Med ovanstående definition av u, v och $\langle u, v \rangle$ är alltså den påstådda olikheten ett specialfall till CS-olikheten. Obs. dock att CS-olikheten gäller under förutsättningen att $\langle u, v \rangle$ är en inre produkt! Detta återstår att verifiera! Vi resonerar som i uppgift 1.

$$\langle u, v \rangle = u^T A v \quad \text{för} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Matrisen A är symmetrisk och positivt definit, då $|2| = 2 > 0$ och $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0$.
Alltså är $\langle u, v \rangle$ en inre produkt på $\mathbb{R}^2$.

3. Vi beräknar on-basen $(b_1, b_2, b_3) = GS(1, X, X^2)$ i $\mathcal{P}_2$ m.a.p. den inre produkten $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx$.

$$\underline{b_1} = \frac{1}{\|1\|} = \underline{1}, \quad \text{då}$$

$$\|1\|^2 = \langle 1, 1\rangle = \int_0^1 1\,dx = 1 \quad\Rightarrow\quad \|1\| = \sqrt{1} = 1.$$

$$\underline{b_2} = \frac{X - \langle X, 1\rangle 1}{\|\ \text{dito}\ \|} = \frac{X - \frac{1}{2}1}{\|\ \text{dito}\ \|} = \sqrt{3}\,2\left(X - \tfrac{1}{2}1\right) = \underline{\sqrt{3}\,(2X-1)}, \quad \text{då}$$

$$\langle X, 1\rangle = \int_0^1 x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2}, \quad \text{och}$$

$$\left\|X - \tfrac{1}{2}1\right\|^2 = \left\langle X - \tfrac{1}{2}1, X - \tfrac{1}{2}1\right\rangle = \int_0^1 \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 dx = \tfrac{1}{3}\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^3\Big|_0^1 = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{8} - \left(-\tfrac{1}{8}\right)\right) = \frac{1}{3\cdot 4}$$

$$\Rightarrow \left\|X - \tfrac{1}{2}1\right\| = \frac{1}{\sqrt{3}\,2} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\left\|X - \frac{1}{2}1\right\|} = \sqrt{3}\,2.$$

$$\underline{b_3} = \frac{X^2 - \langle X^2, 1\rangle 1 - \langle X^2, \sqrt{3}(2X-1)\rangle \sqrt{3}(2X-1)}{\|\ \text{dito}\ \|}$$

$$= \frac{X^2 - \langle X^2, 1\rangle 1 - 3\langle X^2, 2X-1\rangle (2X-1)}{\|\ \text{dito}\ \|}$$

$$= \frac{X^2 - \frac{1}{3}1 - 3\frac{1}{6}(2X-1)}{\|\ \text{dito}\ \|} = \frac{X^2 - X + \frac{1}{6}1}{\|\ \text{dito}\ \|}$$

$$= \sqrt{5}\,6\left(X^2 - X + \tfrac{1}{6}1\right) = \underline{\sqrt{5}\,(6X^2 - 6X + 1)}, \quad \text{då}$$

$$\langle X^2, 1\rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \quad , \quad \text{och}$$

$$\langle X^2, 2X-1\rangle = \int_0^1 x^2(2x-1)\,dx = \int_0^1 (2x^3 - x^2)\,dx = \frac{2}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

och

$$\|X^2 - X + \tfrac{1}{6}1\|^2 = \langle X^2 - X + \tfrac{1}{6}1,\ X^2 - X + \tfrac{1}{6}1\rangle$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + x^2 + \frac{2}{6}x^2 - \frac{2}{6}x + \frac{1}{36}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) dx$$

$$= \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{4}x^4 + \frac{4}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{36}x \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{-18+16-6+1}{36} = \frac{1}{5} - \frac{7}{36} = \frac{36-35}{5\cdot 36} = \frac{1}{5\cdot 36}$$

$$\Rightarrow \|X^2 - X + \tfrac{1}{6}1\| = \frac{1}{\sqrt{5}\,6} \Rightarrow \frac{1}{\|X^2 - X + \frac{1}{6}1\|} = \sqrt{5}\,6 .$$

<u>Svar.</u> $b_1 = 1$, $b_2 = \sqrt{3}(2X-1)$, $b_3 = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)$.

4. Om $X^2 = u + v$ är den ortogonala uppdelningen av X^2 m.a.p. $\mathcal{P}_1$, dvs. $u \in \mathcal{P}_1$ och $v \in \mathcal{P}_1^\perp$, då gäller

$$\boxed{d(X^2, \mathcal{P}_1) = d(X^2, u) = \|v\|},$$

dvs. det kortaste avståndet antas i u och är lika med $\|v\|$. (Förklaring: se nästa sida.)

Enligt uppgift 3 har vi on-basen $(b_1, b_2) = (1, \sqrt{3}(2X-1))$ i $\mathcal{P}_1$. Därmed kan vi räkna ut $u = \mathrm{proj}_{\mathcal{P}_1}(X^2)$ enligt

$$u = \langle X^2, b_1 \rangle b_1 + \langle X^2, b_2 \rangle b_2$$

$$= \langle X^2, 1 \rangle 1 + \langle X^2, \sqrt{3}(2X-1) \rangle \sqrt{3}(2X-1)$$

$$= \ldots (\text{se beräkning av } b_3 \text{ i uppgift 3}) \ldots = X - \tfrac{1}{6} 1 .$$

Vidare är

$$v = X^2 - u = X^2 - X + \tfrac{1}{6} 1 ,$$

och

$$\|v\| = \|X^2 - X + \tfrac{1}{6} 1\| \underset{\text{uppgift 3}}{=} \frac{1}{\sqrt{5}\, 6} = \frac{\sqrt{5}}{30} .$$

Svar. $d(X^2, \mathcal{P}_1) = \frac{\sqrt{5}}{30}$ antas i polynomet $X - \frac{1}{6} 1$.

Förklaring. Låt $X^2 = u + v$, med $u \in \mathcal{P}_1$ och $v \in \mathcal{P}_1^{\perp}$, som ovan.

Låt $t \in \mathcal{P}_1$ vara godtyckligt. Vi ska visa att

$$\boxed{d(X^2, t) \geq d(X^2, u), \text{ med likhet omm } t = u.} \qquad (*)$$

I så fall är nämligen

$$d(X^2, \mathcal{P}_1) = \min_{t \in \mathcal{P}_1} d(X^2, t) = d(X^2, u) = \|X^2 - u\| = \|v\|,$$

vilket skulle förklaras. Påståendet (*) kan uttryckas ekvivalent så här.

$$\|X^2 - t\|^2 \geq \|X^2 - u\|^2, \text{ med likhet omm } t = u. \qquad (*)$$

Bevis till (*).

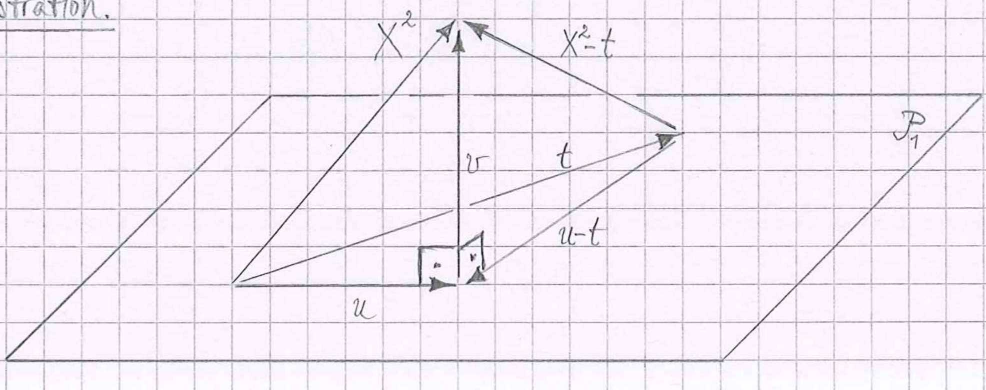
$$\|X^2 - t\|^2 = \|(X^2 - u) + (u - t)\|^2 = \|\underbrace{v}_{\in \mathcal{P}_1^{\perp}} + \underbrace{(u-t)}_{\in \mathcal{P}_1}\|^2 \quad \Rightarrow v \perp u-t$$

$$\underset{\text{Pythagoras sats}}{=} \|v\|^2 + \|u-t\|^2$$

$$\geq \|v\|^2, \text{ med likhet omm } \|u-t\|^2 = 0$$

$$\text{dvs. omm } u = t \qquad \square$$

Illustration.



Resonemanget bakom ovanstående förklaring är så allmänt att det även duger som bevis till följande sats.

Sats. Låt $V = (V, \langle\,\rangle)$ vara ett inre produktrum, $\mathcal{U} \subset V$ ett delrum och $w \in V$ en vektor.

(i) Om $w = u + v$ med $u \in \mathcal{U}$ och $v \in \mathcal{U}^{\perp}$, då är

$$\boxed{d(w, \mathcal{U}) = d(w, u) = \|v\|.}$$

(ii) Om $(b_1, \dots, b_\ell)$ är en on-bas i $\mathcal{U}$, då är

$$\boxed{u = \langle w, b_1 \rangle b_1 + \dots + \langle w, b_\ell \rangle b_\ell .}$$

5. (a) Låt $v, w \in V$ så att $\|v\| = \|w\|$. Beräkna $\alpha = \measuredangle(v+w, v-w)$.

Kom ihåg vinkelns definition:

$$\alpha := \begin{cases} \cos^{-1}\left(\dfrac{\langle v+w, v-w\rangle}{\|v+w\|\,\|v-w\|}\right) & \text{om } v+w \neq 0 \text{ och } v-w \neq 0 \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} & \text{om } v+w = 0 \text{ eller } v-w = 0 \end{cases}$$

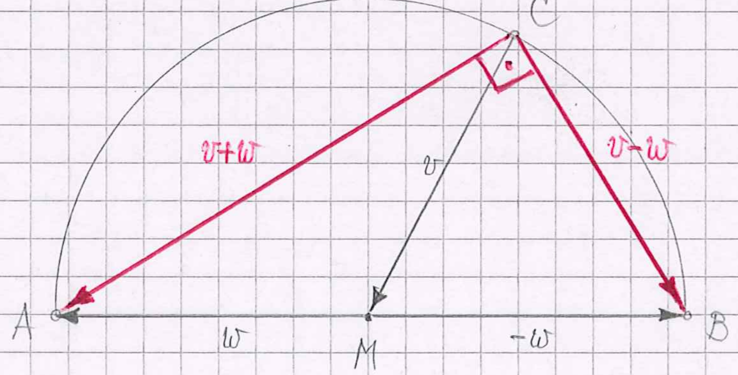
Antagandet $\|v\| = \|w\|$ medför att

$$\begin{aligned} \langle v+w, v-w\rangle &= \langle v,v\rangle - \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle - \langle w,w\rangle \\ &= \|v\|^2 - \langle v,w\rangle + \langle v,w\rangle - \|w\|^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Även ifall $v+w \neq 0$ och $v-w \neq 0$ blir alltså $\alpha = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$.

Svar. $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

(b)



Välj en punkt $M \in \mathbb{E}^2$.

Punkterna $A = M+w$, $B = M-w$, $C = M-v$ ligger på en halvcirkel vars diameter är sträckan mellan A och B. Triangelns vinkel i $C = \measuredangle(v+w, v-w) \underset{(a)}{=} \frac{\pi}{2}$. Detta är Thales sats. Vinkeln i halvcirkeln är rät. Förmodligen mänsklighetens äldsta matematiska sats!

(Thales levde ca. 600 f.Kr. i Miletos, vid mindre asiens medelhavskust.)