Lösningar till tredje tentamensförberedande uppgiften

1. Avbildningen $F : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$, $p \mapsto F(p)$ ges av $\big(F(p)\big)(x) = x\,p(x-3)$.

M.a.o. avbildas $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ på

$$\big(F(p)\big)(x) = x\left(a_0 + a_1(x-3) + a_2(x-3)^2\right)$$

(a)
$$\begin{aligned}
\big(F(p+q)\big)(x) &= x\,(p+q)(x-3) \\
&= x\big(p(x-3) + q(x-3)\big) \\
&= x\,p(x-3) + x\,q(x-3) \\
&= \big(F(p)\big)(x) + \big(F(q)\big)(x) \\
&= \big(F(p) + F(q)\big)(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{visar att}
\end{aligned}$$

$$F(p+q) = F(p) + F(q) \qquad (L1)$$

$$\begin{aligned}
\big(F(cp)\big)(x) &= x\,(cp)(x-3) \\
&= x\;c\big(p(x-3)\big) \\
&= c\,x\,p(x-3) \\
&= c\,\big(F(p)\big)(x) \\
&= \big(c\,F(p)\big)(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{visar att}
\end{aligned}$$

$$F(cp) = c\,F(p) \qquad (L2)$$

Då F uppfyller (L1) och (L2) är F linjär.

(b) Standardbaserna i $\mathcal{P}_2$ och $\mathcal{P}_3$ är $\underline{X} = (1, X, X^2)$ och $\underline{\hat{X}} = (1, X, X^2, X^3)$.

F:s matris i $\underline{X}$ och $\underline{\hat{X}}$ är enligt definition

$$A = [F]_{\underline{\hat{X}}\,\underline{X}} = \left([F(1)]_{\underline{\hat{X}}} \,\middle|\, [F(X)]_{\underline{\hat{X}}} \,\middle|\, [F(X^2)]_{\underline{\hat{X}}} \right).$$

Vidare är

$$(F(1))(x) = x\,1(x-3) = x1 = x = X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{alltså}$$

$$F(1) = X \; ;$$

$$(F(X))(x) = x\,X(x-3) = x(x-3) = x^2 - 3x = (X^2 - 3X)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{alltså}$$

$$F(X) = -3X + X^2 \; ;$$

$$(F(X^2))(x) = x\,X^2(x-3) = x(x-3)^2 = x(x^2 - 6x + 9) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$= (X^3 - 6X^2 + 9X)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{alltså}$$

$$F(X^2) = 9X - 6X^2 + X^3 .$$

Därmed blir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) För varje $p = a_0 1 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathcal{P}_2$ är $[p] = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

<u>Följande samband råder:</u>

(i) $p \in \ker(F)$ <u>omm</u> $[p] \in N(A)$.

(ii) $(p_1, \dots, p_k)$ <u>är en bas i $\ker(F)$</u> <u>omm</u> $([p_1], \dots, [p_k])$ <u>är en bas i $N(A)$</u>.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ & & \end{pmatrix} \quad \text{visar att } N(A) = \{0\}.$$

Enligt (i) är då $\ker(F) = \{0\}$, <u>vars bas är tom!</u>

(d) För varje $q = b_0 1 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3 \in \mathcal{P}_3$ är $[q] = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

<u>Följande samband råder:</u>

(i) $q \in \operatorname{im}(F)$ <u>omm</u> $[q] \in K(A)$.

(ii) $(q_1, \dots, q_\ell)$ <u>är en bas i $\operatorname{im}(F)$</u> <u>omm</u> $([q_1], \dots, [q_\ell])$ <u>är en bas i $K(A)$</u>.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 3 & -9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \\ & 1 & -6 \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \underset{k}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ & 1 & -6 \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \underset{k}{\sim} \begin{bmatrix} & & \\ 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = U$$

$$K(A) = K(U) = \operatorname{span}\{\underbrace{e_2, e_3, e_4}_{b}\} \Rightarrow (e_2, e_3, e_4) \text{ är en bas i } K(A)$$

$$\Rightarrow (X, X^2, X^3) \ \underline{\text{är en bas i } \operatorname{im}(F)}.$$

(e) Dimensionssatsens påstående

$$\dim(\ker(F)) + \dim(\operatorname{im}(F)) = \dim(V)$$

gäller för varje linjär avbildning $F: V \to W$. För uppgiftens linjära avbildning $F: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ antar denna ekvation följande form.

$$\begin{array}{ccccc} \dim(\ker(F)) & + & \dim(\operatorname{im}(F)) & = & \dim(\mathcal{P}_2) \\ \|(c) & & \|(d) & & \| \\ 0 & + & 3 & = & 3 \end{array}$$, vilket ju stämmer.

(f) $\ker(F) \underset{(c)}{=} \{0\} \Rightarrow F$ är injektiv.

$\dim(\mathcal{P}_2) < \dim(\mathcal{P}_3) \Rightarrow F$ är ej surjektiv $\Rightarrow F$ är ej bijektiv.

2. Vi skriver $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ istället för (x,y).

(a) VL i K:s ekvation är den kvadratiska formen

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 = x^T A x, \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

K är en hyperbel $\Leftrightarrow \operatorname{sign}(q) = (1,-1)$

$\Leftrightarrow A$ har ett positivt och ett negativt egenvärde

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 \\ -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 9 = (\lambda-1+3)(\lambda-1-3) = (\lambda+2)(\lambda-4)$$

löses av $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$. Alltså är $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, vilket visar att K är en hyperbel.

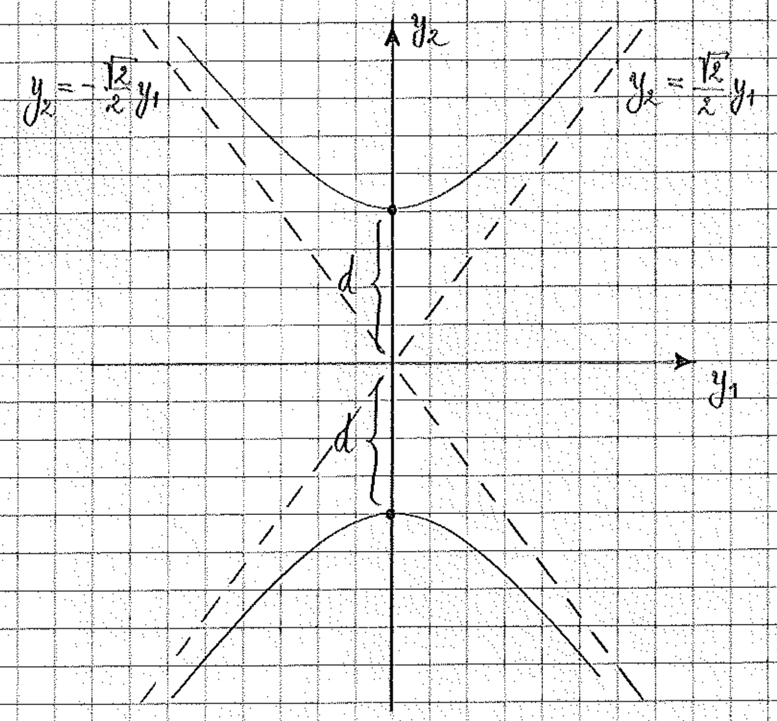
(b) Om b_1, b_2 är normerade basvektorer i $E(-2)$, $E(4)$, då är $\underline{b} = (b_1, b_2)$ en on-bas i $\mathbb{E}^2$ så att

$$q(x) = -2y_1^2 + 4y_2^2 \qquad \forall\, x = y_1 b_1 + y_2 b_2 \in \mathbb{E}^2 .$$

I synnerhet är

$$x \in K \Leftrightarrow q(x) = 1 \Leftrightarrow 4y_2^2 - 2y_1^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (2y_2 + \sqrt{2}\, y_1)(2y_2 - \sqrt{2}\, y_1) = 1$$



K:s symmetriaxlar är y_1-axeln $\operatorname{span}\{b_1\} = E(-2) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ och

y_2-axeln $\operatorname{span}\{b_2\} = E(4) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$, då

$$E(-2) = N(-2I - A) = \left\{\begin{pmatrix}-t\\t\end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\} \quad \text{och } b_2 \perp b_1 .$$

$$-2I - A = \begin{pmatrix}-3 & -3\\ -3 & -3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad x_1 = -x_2$$

Sätt $x_2 = t$

(c) $d = d(K, 0)$ antas enligt figur då $y_1 = 0$ och $4y_2^2 = 1$, dvs. $y_2 = \pm\frac{1}{2}$,

alltså i punkterna $(y_1, y_2) = (0, \pm\frac{1}{2})$.

<u>Svar</u> (c). $d = \frac{1}{2}$.

<u>Rent algebraiskt kan man (alternativt) bestämma</u> $d = d(K, 0)$ <u>på följande vis.</u>

För alla $x \in K$ med $[x]_{\underline{b}} = y$ är $y_2^2 - \frac{1}{2}y_1^2 = \frac{1}{4}$, och därmed

$$d(x, 0)^2 = \|x - 0\|^2 = \|x\|^2 \underset{\underline{b}\text{ on}}{=} \|[x]_{\underline{b}}\|^2 = \|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2$$

$$= y_2^2 - \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{3}{2}y_1^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{2}y_1^2 \geq \frac{1}{4} \text{, och}$$

$y_1 = 0$ ger det minsta avståndet $d^2 = \frac{1}{4}$, alltså $d = \frac{1}{2}$.

3. Punkter i $\mathbb{E}^3$ betecknar vi med $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ istället för (x, y, z). Vänsterledet i Y:s ekvation blir då

$$q(x) = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = x^T A x \quad \text{för } A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-7 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-6 & -2 \\ -1 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-9 & \lambda-9 & \lambda-9 \\ -1 & \lambda-6 & -2 \\ -1 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-9)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-6 & -2 \\ -1 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-9)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-5 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-9)\left((\lambda-5)^2 - 1\right) = (\lambda-9)(\lambda-6)(\lambda-4)$$

har rötterna $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. Dessa är A:s egenvärden.

Ytans typ. Om b_1, b_2, b_3 är normerade basvektorer i $E(4), E(6), E(9)$, då är $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ en on-bas i $\mathbb{E}^3$ så att

$$q(x) = 4y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2 \qquad \forall\, x = \sum_{i=1}^{3} y_i b_i \in \mathbb{E}^3.$$

Alltså är

$$\begin{aligned} x \in Y \iff & q(x) = 36 \\ \iff & 4y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2 = 36 \\ \iff & \frac{y_1^2}{9} + \frac{y_2^2}{6} + \frac{y_3^2}{4} = 1, \end{aligned}$$

dvs Y är en ellipsoid med radierna $3, \sqrt{6}, 2$ på y_1, y_2, y_3-axlarna.

Största och minsta avstånd från origo. För varje $x \in Y$ med $[x]_{\underline{b}} = y$ är

$$d(x, 0)^2 = \|x - 0\|^2 = \|x\|^2 \underset{\underline{b}\text{ on}}{=} \|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \quad \text{och}$$

$$4 = \frac{4}{9}y_1^2 + \frac{4}{6}y_2^2 + y_3^2 \le y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \le y_1^2 + \frac{9}{6}y_2^2 + \frac{9}{4}y_3^2 = 9$$

likhet omm $y_1 = y_2 = 0$ och $y_3 = \pm 2$

likhet omm $y_2 = y_3 = 0$ och $y_1 = \pm 3$

Största avståndet 3 antas i $\pm 3 b_1 = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Minsta avståndet 2 antas i $\pm 2 b_3 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Beräkning av b_1 = normerad basvektor i $E(4)$ och b_3 = normerad basvektor i $E(9)$.

$$E(4) = N(4I - A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$4I - A = \begin{pmatrix}-3&-1&-1\\-1&-2&-2\\-1&-2&-2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&2\\-3&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&2\\0&5&5\\0&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\&1&1\\&&\end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

Sätt $x_3 = t$.

$$E(9) = N(9I - A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$9I - A = \begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&3&-2\\-1&-2&3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&3&-2\\2&-1&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&-3\\0&5&-5\\0&-5&+5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

Sätt $x_3 = t$.

Svar. Y är en ellipsoid.

Största avståndet 3 antas i punkterna: $\pm \frac{3}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Minsta avståndet 2 antas i punkterna: $\pm \frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

4. (a) $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$A^\perp = \{x \in E^3 \mid x \perp a\} = \{x \in E^3 \mid a \cdot x = 0\} = \{x \in E^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

Sätt $x_2 = s$, $x_3 = t$.

$$= \left\{ \begin{pmatrix}-s-t\\ s\\ t\end{pmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\Bigg\{ \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}_{a_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{a_3} \Bigg\}$$

$$b_2 = \frac{a_2}{\|a_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$b_3 = \frac{a_3 - (a_3 \cdot b_2)\, b_2}{\|\text{dito}\|} = \frac{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\, 1\, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}{\|\text{dito}\|} = \frac{\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}}{\|\text{dito}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

(b)

$$[R]_{\underline{b}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

(c)

$$[R] = [R]_{\underline{e}} = T_{\underline{e}\underline{b}}\, [R]_{\underline{b}}\, T_{\underline{b}\underline{e}} = T_{\underline{e}\underline{b}}\, [R]_{\underline{b}}\, T_{\underline{e}\underline{b}}^{T} =$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

(d) $[R(x)] = [R][x] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 29 \\ 31 \\ 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 29 \\ 31 \end{pmatrix}$ medför att $R(x) = (37, 29, 31)$.

5. $f(x) = Ax$ för $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ visar att $f = f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ är linjär.

$\dim(\mathbb{R}^2) < \dim(\mathbb{R}^3) \Rightarrow f$ är ej surjektiv

$\Rightarrow f$ är ej bijektiv.

$$\begin{aligned} f \text{ är injektiv } &\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\} \\ &\Leftrightarrow N(A) = \{0\} \\ &\Leftrightarrow \dim(N(A)) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 - \operatorname{rang}(A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = 2 \end{aligned}$$

$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ visar att $\operatorname{rang}(A) = 2$. Alltså är f injektiv.

$g(x) = Bx$ för $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ visar att $g = f_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ är linjär.

$\dim(\mathbb{R}^3) > \dim(\mathbb{R}^2) \Rightarrow g$ är ej injektiv $\Rightarrow g$ är ej bijektiv.

$$\begin{aligned} g \text{ är surjektiv } &\Leftrightarrow \operatorname{im}(g) = \mathbb{R}^2 \\ &\Leftrightarrow K(B) = \mathbb{R}^2 \\ &\Leftrightarrow \dim(K(B)) = 2 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{rang}(B) = 2 \end{aligned}$$

$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$ visar att $\operatorname{rang}(B) = 2$.

Alltså är g surjektiv.