Räkneövning 1

UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
ERNST DIETERICH

CIVILINGENJÖRSPROGRAMMET ES
KANDIDATPROGRAMMET I MATEMATIK
LÄRARPROGRAMMET, FRISTÅENDE KURSER
2011-09-19

Linjär algebra och geometri I, HT11

Första tentamensförberedande uppgiften

Dessa uppgifter utgör extra övningsmaterial inför duggan. De är frivilliga, löses hemma, och lämnas inte in för rättning. Istället går vi igenom dem på räkneövningen den 21 september.

1. Bestäm koefficienterna a, b, c så att kurvan $y = a + bx + cx^2$ går genom punkterna $(1, 0)$, $(3, 3)$ och $(5, 2)$.

2. Lös matrisekvationen $AX = XA$ för $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Skriv matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ som produkt av elementärmatriser.

4. Givet $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, finn

(a) minorernas matris M,

(b) kofaktormatrisen C,

(c) adjungatan $\operatorname{adj}(A)$,

(d) determinanten $\det(A)$,

(e) inversen A^{-1}.

Lösningar till tentamensförberedande uppgift 2011-09-19

1. Kurvan $y = a + bx + cx^2$ går genom punkterna $(1,0)$, $(3,3)$ och $(5,2)$ omm a, b, c löser ekvationssystemet

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + 3b + 9c = 3 \\ a + 5b + 25c = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 25 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 4 & 24 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \frac{1}{2}\cdot \\ \frac{1}{8}\cdot \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right)$$

<u>Svar.</u> $(a, b, c) = \left(-3, \frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

2. Om $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ löser $AX = XA$, då är

m = antalet rader i X = antalet rader i XA = antalet rader i AX = antalet rader i A = 2

n = antalet kolonner i X = antalet kolonner i AX = antalet kolonner i XA = antalet kolonner i A = 2,

alltså $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

En matris $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ löser $AX = XA$ omm

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

dvs omm $\begin{cases} a + c = a \\ b + d = a + b \\ c = c \\ d = c + d \end{cases} \sim \begin{cases} c = 0 \\ d = a \\ 0 = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

<u>Svar.</u> $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

3. $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \tfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (-2) \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = E_1 A, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = E_2 E_1 A, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 E_2 E_1 A, \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = E_4 E_3 E_2 E_1 A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} = E_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} = E_2$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = E_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} (-2) \sim \begin{pmatrix} 1 & & -2 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = E_4$$

$$E_4 E_3 E_2 E_1 A = I \Rightarrow A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} E_4^{-1}$$

<u>Svar.</u> $A = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 2 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ exempelvis.

<u>Variant.</u> <u>Skriv A^{-1} som produkt av elementärmatriser.</u>

<u>Lösning.</u> $E_4 E_3 E_2 E_1 A = I \Rightarrow E_4 E_3 E_2 E_1 = I A^{-1} = A^{-1}$

<u>Svar.</u> $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & -2 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ exempelvis.

4. (a) $M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12-20 = -8$, $\quad M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -12$, $\quad M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -6$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -5$, $\quad M_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3$, $\quad M_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$, $\quad M_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$, $\quad M_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

Därmed är $M = \begin{pmatrix} -8 & -12 & -6 \\ -5 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $C = \begin{pmatrix} -8 & 12 & -6 \\ 5 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\operatorname{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} -8 & 5 & -2 \\ 12 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\det(A) = 0 \cdot C_{11} + 0 \cdot C_{12} + 1 \cdot C_{13} = -6$

(e) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = -\dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} -8 & 5 & -2 \\ 12 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Gammal tentamensuppgift. För vilka värden på a har systemet

$$\begin{cases} 2x + (a+6)y + (3a+7)z = 10+3a \\ x + 2y + 2z = 3 \\ -2x + (a-2)y + (4a-2)z = 4a-2 \end{cases}$$

ingen lösning, precis en lösning, eller oändligt många lösningar?

Gammal tentamensuppgift. Lösning.

$$\begin{pmatrix} 2 & a+6 & 3a+7 & 10+3a \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & a-2 & 4a-2 & 4a-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & a+6 & 3a+7 & 10+3a \\ -2 & a-2 & 4a-2 & 4a-2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & a+2 & 3a+3 & 3a+4 \\ 0 & a+2 & 4a+2 & 4a+4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & a+2 & 3a+3 & 3a+4 \\ 0 & 0 & a-1 & a \end{pmatrix} = M$$

Om $a \neq -2$ och $a \neq 1$, då fortsätter vi med att multiplicera M:s andra rad med $\frac{1}{a+2}$ och M:s tredje rad med $\frac{1}{a-1}$, och då får vi

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

Systemet har då precis en lösning.

Om $a = -2$, då är

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Systemet har då oändligt många lösningar.

Om $a = 1$, då är

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Systemet har då ingen lösning.