R2

<u>Extra uppgift.</u> (a) <u>Avgör om punkterna</u> $A=(2,3,5)$, $B=(2,4,7)$, $C=(3,5,8)$, $D=(4,6,9)$ <u>ligger i ett plan.</u>

(b) <u>Om så är fallet</u>, <u>bestäm planets ekvation på standardform.</u>

<u>Lösning.</u> (a) A, B, C, D ligger i ett plan $\Leftrightarrow$ $V(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$.

$$V(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \left| \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AD} \end{bmatrix} \right|$$

$$\det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AD} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

visar att A, B, C, D ligger i ett plan E.

(b) Som normalvektor till E duger

$$n = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-2, 4, -2),$$

men även $m = -\frac{1}{2}n = (1, -2, 1)$. Med normalvektorn $m \perp E$ och punkten $A \in E$ fås planets ekvation på <u>punktnormalform</u>

$$1 \cdot (x-2) - 2(y-3) + 1 \cdot (z-5) = 0 \quad \sim$$

$$x - 2y + z - 2 + 6 - 5 = 0 \quad \sim$$

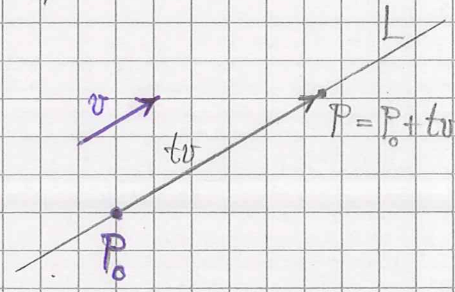
$$x - 2y + z - 1 = 0$$

<u>Svar.</u> <u>Punkterna</u> A, B, C, D <u>ligger i planet</u> E: $x - 2y + z - 1 = 0$.

__Linjens ekvation på parameterform.__ Givet en punkt $P_0 \in \mathbb{R}^n$ och en nollskild vektor $v \in \mathbb{R}^n$, så är $P = P_0 + tv$ en punkt i $\mathbb{R}^n$ för varje värde på parametern $t \in \mathbb{R}$.

Mängden av alla dessa punkter bildar en __linje__

$$L = \{ P_0 + tv \mid t \in \mathbb{R} \}$$



i $\mathbb{R}^n$ med __riktningsvektor__ v, och skrivsättet

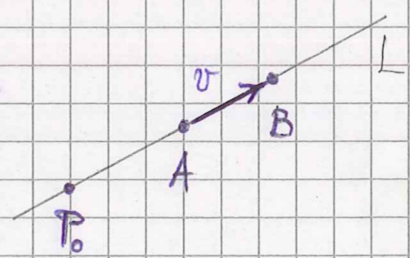
$$L : P = P_0 + tv \ , \quad t \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

kallas för __linjens ekvation på parameterform__.

__Obs.__ att man m.h.a. $(*)$ kan beskriva linjer L i $\mathbb{R}^n$ __för varje__ $n \geq 2$.

__Obs.__ även att beskrivningen __inte är entydig__. Givet en linje L i $\mathbb{R}^n$, så duger __varje punkt__ $P_0 \in L$ och __varje vektor__ $v = \overrightarrow{AB}$ __med__ $A, B \in L$ __och__ $A \neq B$ till att beskriva L på parameterformen

$$L : P = P_0 + tv \ , \ t \in \mathbb{R} \ .$$



Dock är alla möjliga riktningsvektorer till en given linje L __proportionella__, dvs. de skiljer sig endast med en skalär multipel.

Ex. 1 Beskriv linjen $L: 2x+3y=5$ på parameterform.

Lösning. Välj olika punkter $A, B \in L$ och tag $P_0 = A$ samt $v = \overrightarrow{AB}$. Ex.vis duger

$$A = \left(\frac{5}{2}, 0\right), \quad B = \left(0, \frac{5}{3}\right), \quad v = \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right).$$

Svar. $L: P = \left(\frac{5}{2}, 0\right) + t\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$

Föredrar man heltal i parameterformen, så kan man ex.vis ta $P_0 = (1,1) \in L$ och som riktningsvektor $w = -\frac{6}{5}v = (3,-2)$. Då blir ett

Alternativt svar. $L: P = (1,1) + t(3,-2), \quad t \in \mathbb{R}.$

Ex. 2 Beskriv linjen $L: P = (1,2) + t(3,4), \ t \in \mathbb{R}$ på standardform.

Lösning. $v = (3,4)$ är L:s riktningsvektor. Varje vektor $n \neq 0$ med $n \perp v$ duger då som L:s normalvektor. Ex.vis kan vi ta $n = (4,-3)$, då $(4,-3)\cdot(3,4) = 12 - 12 = 0$. Med normalvektorn $n \perp L$ och punkten $(1,2) \in L$ fås linjens ekvation på punktnormalform

$$4(x-1) - 3(y-2) = 0 \quad \sim$$

$$4x - 3y - 4 + 6 = 0 \quad \sim$$

$$4x - 3y + 2 = 0$$

Svar. $L: 4x - 3y + 2 = 0.$

Ex. 3 Planen $E: x+y+z=2$ och $F: x+y+2z=3$ skär varandra i en linje L. Beskriv L på parameterform.

Lösning. Skärningsmängden $L = E \cap F$ är lösningsmängden till $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 1-y \\ z = 1 \end{cases}$$ Sätt $y=t$, där $t \in \mathbb{R}$.

Den allmänna lösningen är då

$$(x,y,z) = (1-t, t, 1) = (1,0,1) + (-t,t,0) = (1,0,1) + t(-1,1,0).$$

Svar. $L: P = (1,0,1) + t(-1,1,0), \quad t \in \mathbb{R}$.

Ex. 4 Låt E och F vara planen i Ex. 3.

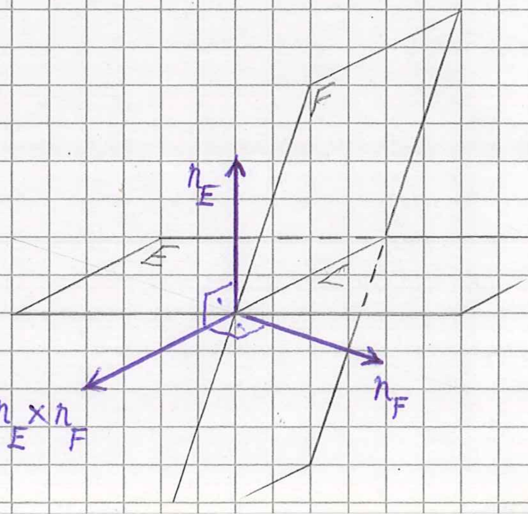
(a) Motivera utan räkning att E och F skär varandra i en linje L.

(b) Finn en riktningsvektor för L med hjälp av vektorprodukten.

Lösning. (a) Normalvektorerna $n_E = (1,1,1)$ och $n_F = (1,1,2)$ är inte proportionella

$\Rightarrow$ planen E och F är inte parallella

$\Rightarrow$ planen E och F skär varandra i en linje L.



(b) $L \perp n_E$ då $L \subset E$

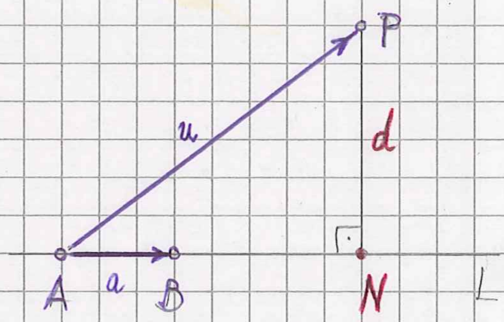
$L \perp n_F$ då $L \subset F$

v riktningsvektor till $L \Leftrightarrow v \perp n_E$ och $v \perp n_F$

Alltså duger $v = n_E \times n_F$ som riktningsvektor till $L = E \cap F$.

$$n_E \times n_F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1, -1, 0)$$

2007-10-22: 5. Linjen L går genom punkterna $A = (2,1,-3)$ och $B = (0,2,-1)$. Bestäm avståndet mellan punkten $P = (4,3,0)$ och linjen L, samt den punkt N på L som ligger närmast P.



Lösning. Sätt $a = \overrightarrow{AB}$ och $u = \overrightarrow{AP}$. Då är

$\overrightarrow{AN} = \mathrm{proj}_a u$, alltså $N = A + \mathrm{proj}_a u$.

Vi räknar:

$$a = (-2, 1, 2), \quad u = (2, 2, 3),$$

$$\mathrm{proj}_a u = \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a = \frac{-4+2+6}{4+1+4} a = \frac{4}{9}(-2, 1, 2)$$

$$N = (2, 1, -3) + \frac{4}{9}(-2, 1, 2) = \frac{1}{9}\big((18, 9, -27) + (-8, 4, 8)\big) = \frac{1}{9}(10, 13, -19)$$

$$d = \| u - \mathrm{proj}_a u \| = \left\| (2,2,3) - \frac{4}{9}(-2,1,2) \right\| = \left\| \frac{1}{9}\big((18,18,27) - (-8,4,8)\big) \right\|$$

$$= \left\| \frac{1}{9}(26, 14, 19) \right\| = \frac{1}{9}\sqrt{26^2 + 14^2 + 19^2} = \frac{1}{9}\sqrt{676 + 196 + 361}$$

$$= \frac{1}{9}\sqrt{1233} = \frac{1}{9}\sqrt{9 \cdot 137} = \frac{1}{3}\sqrt{137}$$

Svar. $d(P, L) = \frac{1}{3}\sqrt{137}$, $N = \frac{1}{9}(10, 13, -19)$.

2007-10-22: 6. Planet E går genom punkterna $A=(5,4,3)$, $B=(4,3,1)$ och $C=(1,5,4)$. Bestäm avståndet mellan punkten $P=(3,3,3)$ och planet E, samt den punkt N på planet E som ligger närmast P.

Lösning. Som normalvektor till E duger

$$n = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-1,-1,-2)\times(-4,1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & -2 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (1,9,-5)$$

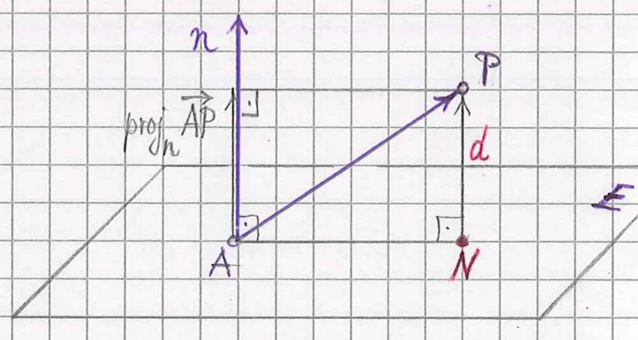
Med $A \in E$ får vi E:s ekvation på punktnormalform:

$$\begin{aligned} 1(x-5)+9(y-4)-5(z-3) &= 0 \quad \sim \\ x+9y-5z-5-36+15 &= 0 \quad \sim \\ x+9y-5z-26 &= 0 \end{aligned}$$

$$d(P,E) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|3+27-15-26|}{\sqrt{1+81+25}} = \frac{11}{\sqrt{107}} = \frac{11}{107}\sqrt{107}$$

Enligt figur är $\overrightarrow{NP} = \mathrm{proj}_n \overrightarrow{AP}$, alltså

$N = P - \overrightarrow{NP} = P - \mathrm{proj}_n \overrightarrow{AP}$. Vi räknar:



$$\mathrm{proj}_n \overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AP}\bullet n}{\|n\|^2}\, n$$

$$= \frac{(-2,-1,0)\bullet(1,9,-5)}{1+81+25}(1,9,-5) = \frac{-11}{107}(1,9,-5)$$

$$N = (3,3,3) + \frac{11}{107}(1,9,-5) = \frac{1}{107}\big((321,321,321)+(11,99,-55)\big) = \frac{1}{107}(332,420,266)$$

Svar. $d(P,E) = \frac{11}{107}\sqrt{107}$, $N = \frac{1}{107}(332,420,266)$.