R3

Vi går igenom några uppgifter från tentan 2011-08-16.

4. Planet E går genom punkterna $A=(1,1,0)$, $B=(1,2,1)$, $C=(1,2,2)$. Bestäm alla punkter $P\in E$ så att $\overrightarrow{OP}\cdot(1,1,-1)=2$.

Lösning. För varje punkt $P=(x,y,z)$ är

$$\overrightarrow{OP}\cdot(1,1,-1) = (x,y,z)\cdot(1,1,-1) = x+y-z.$$

Att P uppfyller villkoret $\overrightarrow{OP}\cdot(1,1,-1)=2$ betyder alltså att P ligger i planet

$$F:\quad x+y-z=2$$

Uppgiften är därmed att bestämma skärningsmängden $L=E\cap F$. Vi behöver E:s ekvation. Som normalvektor till E duger

$$n=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (0,1,1)\times(0,1,2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1\end{vmatrix}\right) =$$
$$=(1,0,0)$$

Med $A\in E$ och $n\perp E$ får vi E:s ekvation

$$1(x-1)+0(y-1)+0(z-0)=0 \qquad \text{på punktnormalform, respektive}$$

$$x-1=0 \qquad \text{på standardform.}$$

Den sökta skärningsmängden $L=E\cap F$ är lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x = 1 \\ x+y-z=2 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 1 \\ y-z=1 \end{cases} \sim \begin{cases} x=1 \\ y=1+z \end{cases}$$

Sätt $z = t$, där $t \in \mathbb{R}$. Den allmänna lösningen blir då

$$P = (x,y,z) = (1, 1+t, t) = (1,1,0) + t(0,1,1), \quad \text{där } t \in \mathbb{R}.$$

<u>Svar.</u> $P = (1,1,0) + t(0,1,1), \quad t \in \mathbb{R}$

<u>Geometrisk tolkning.</u> <u>De sökta punkterna</u> P <u>bildar linjen genom punkten</u> $A = (1,1,0)$ <u>med riktningsvektor</u> $v = (0,1,1)$.

5. <u>Givet punkterna</u> $A = (1,1,0)$, $B = (1,-1,1)$, $C = (1,2,2)$, <u>bestäm</u> $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, $\|\overrightarrow{BC}\|$, <u>samt arean</u> F <u>av triangeln</u> ABC.

<u>Lösning.</u> $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (0,-2,1) \cdot (0,1,2) = 0-2+2 = 0$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-5,0,0)$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \|(0,3,1)\| = \sqrt{0+9+1} = \sqrt{10}$$

$$F = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{25+0+0} = \frac{5}{2}$$

6. (a) <u>Visa att vektorerna</u> $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ <u>är linjärt oberoende</u>.

(b) <u>Avgör om</u> $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ <u>är en bas i</u> $\mathbb{R}^4$.

(c) <u>Avgör om</u> $u = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ <u>är en linjärkombination av</u> v_1, v_2, v_3.

Lösning. (a) $\underline{v}$ lo betyder (enligt definition) att ekvationen

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0 \qquad (*_0)$$

endast har den triviala lösningen $(c_1, c_2, c_3) = (0,0,0)$. Med de givna vektorerna v_1, v_2, v_3 ser ekvationen $(*_0)$ så här ut.

$$\begin{bmatrix} c_1 + c_2 + 2c_3 \\ c_1 \quad + c_3 \\ -c_1 + c_2 \\ c_1 \quad - c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (*_0)$$

(c_1, c_2, c_3) löser $(*_0)$ omm (c_1, c_2, c_3) löser det linjära ekvationssystemet med totalmatris

$$\begin{array}{cc} 1 & -1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{ccc} -1 & 2 & 1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ -1\cdot \\ \\ -\frac{1}{2}\cdot \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ \\ -1 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & \end{bmatrix}$$

omm $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$. Alltså är $(c_1, c_2, c_3) = (0,0,0)$ den enda lösningen till $(*_0)$.

(b) $\underline{v}$ är en bas i $\mathbb{R}^4$ betyder (enligt definition) att $\underline{v}$ är lo och spänner upp $\mathbb{R}^4$.

Enligt (a) är $\underline{v}$ lo. $\underline{v}$ spänner upp $\mathbb{R}^4$ betyder (enligt definition) att ekvationen

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = w \qquad (*_w)$$

är lösbar för varje $w \in \mathbb{R}^4$.

$(*_w)$ är lösbar omm det linjära ekvationssystemet med totalmatris

$$\left[\begin{array}{c|c} A & w \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & w_1 \\ 1 & 0 & 1 & w_2 \\ -1 & 1 & 0 & w_3 \\ 1 & 0 & -1 & w_4 \end{array}\right]$$

är lösbar. Detta avgörs med Gaussalgoritm.

$$\left(\begin{array}{c|c} A & w \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} & \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & x_1 \\ & 1 & & & x_2 \\ & & 1 & & x_3 \\ & & & & x_4 \end{array}\right)$$

Hur beror x på w? Kom ihåg elementärmatriser!

$$\left(\begin{array}{c|c} & \end{array}\right) = E_1 \left(\begin{array}{c|c} A & w \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & x_1 \\ & 1 & & & x_2 \\ & & 1 & & x_3 \\ & & & & x_4 \end{array}\right) = \underbrace{E_\ell \cdots E_1}_{E} \left(\begin{array}{c|c} A & w \end{array}\right) = E \left(\begin{array}{c|c} A & w \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} EA & Ew \end{array}\right)$$

Som produkt av elementärmatriser är $E = E_\ell \cdots E_1$ inverterbar.

$Ew = x$ innebär att $x_4 \neq 0$ för vissa $w \in \mathbb{R}^4$. Ex. vis gäller för

$$w = E^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{att} \quad x = Ew = EE^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = I\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Då $x_4 = 1$ slutar trappan i ett hörn. Alltså är $(*_w)$ <u>inte</u> lösbar för denna vektor w.

Alltså spänner $\underline{v}$ <u>inte</u> upp $\mathbb{R}^4$. Alltså är $\underline{v}$ <u>inte</u> en bas i $\mathbb{R}^4$.

(c) u <u>är en linjärkombination av</u> v_1, v_2, v_3 betyder (enligt definition) att ekvationen

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = u \qquad (*_u)$$

är lösbar. Detta avgörs med Gaussalgoritm.

$$\begin{array}{c} 1 \quad -1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} -1 \quad 2 \quad 1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} \\ -1\cdot \\ \\ -\frac{1}{2}\cdot \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ -1 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$(*_u)$ är (entydigt) lösbar med $(c_1, c_2, c_3) = (-2, 1, 0)$.

Svar. (b) $\underline{v}$ är inte en bas i $\mathbb{R}^4$; (c) u är en linjärkombination av v_1, v_2, v_3.

7. En linjär operator $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uppfyller $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$.
Finn f:s matris.

Lösning. $[f] = \left(f(e_1) \,\middle|\, f(e_2) \,\middle|\, f(e_3) \right)$

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow f(e_1) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right) \underset{(L1)}{=} f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + f\left(-\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$\underset{(L2)}{=} f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$ medför att

$$f(e_3) = f\left(-2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \underset{(L1),(L2)}{=} -2f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= -2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\9\\9\end{pmatrix}$$

Svar. $[f] = \begin{pmatrix}1 & -3 & 9\\2 & -3 & 9\\3 & -3 & 9\end{pmatrix}$

Obs. Då f är linjär, gäller med (L1) och (L2) likheten
$$f(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) = c_1f(v_1) + c_2f(v_2) + c_3f(v_3)$$
för alla $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ och alla $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

8. Visa att planet $E: x+y+z=2$ och planet F som innehåller punkten $A=(0,0,1)$ och linjen $L: (x,y,z)=(1-t,t,0)$ inte har några gemensamma punkter.

Lösning. $E \cap F = \emptyset \iff E$ och F är parallella men olika

$\iff$ normalvektorerna n_E och n_F är proportionella och $E \neq F$.

$E \neq F$, då $A \notin E$ medan $A \in F$.

$n_E = (1,1,1)$. Med $t=0$ får vi punkten $B=(1,0,0) \in F$. Dessutom ligger L:s riktningsvektor $v=(-1,1,0)$ i F. Som normalvektor till F duger alltså

$$n_F = \overrightarrow{AB} \times v = (1,0,-1) \times (-1,1,0) = (1,1,1).$$

$n_E = n_F \Rightarrow E$ och F är parallella. $\square$

4.9.19 (a) Den linjära operatorn $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges som rotation kring x-axeln med vinkel $30°$. Finn f:s matris, samt $f(v)$ för $v = (-2,1,2)$.

Lösning. $[f] = \left(f(e_1) \,\middle|\, f(e_2) \,\middle|\, f(e_3) \right)$. Man ser att

$$f(e_1) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(e_1 ligger på rotationsaxeln)

$$f(e_2) = (\cos 30°)\, e_2 + (\sin 30°)\, e_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

(e_2 är ortogonal mot rotationsaxeln, och roteras därför i yz-planet)

$$f(e_3) = -(\sin 30°)\, e_2 + (\cos 30°)\, e_3 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

(även e_3 är ortogonal mot rotationsaxeln, och roteras därför i yz-planet)

Därmed är $[f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ samt

$$f(v) = [f]\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ \frac{1}{2} + \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Tycker man sig inte kunna <u>se</u> de roterade standardbasvektorerna $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$, så kan man alternativt <u>beräkna</u> dem utifrån den allmänna rotationsformeln

$$\boxed{f(u) = (u \cdot a)\,a + (\cos\alpha)\big(u - (u \cdot a)\,a\big) + (\sin\alpha)\,(a \times u)}\,.$$

I den föreliggande uppgiften är axelns riktningsvektor $a = e_1$ och $\alpha = 30^\circ$, alltså

$$f(u) = u_1 e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,(u - u_1 e_1) + \frac{1}{2}\,(e_1 \times u) \qquad \forall\, u \in \mathbb{R}^3 .$$

Speciellt blir då

$$f(e_1) = e_1$$

$$f(e_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,e_2 + \frac{1}{2}\,e_3$$

$$f(e_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,e_3 + \frac{1}{2}\,(-e_2) = -\frac{1}{2}\,e_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,e_3$$