Räkneövning 4

UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
ERNST DIETERICH

CIVILINGENJÖRSPROGRAMMET ES
KANDIDATPROGRAMMET I MATEMATIK
LÄRARPROGRAMMET, FRISTÅENDE KURSER
2011-10-17

Linjär algebra och geometri I, HT11

Andra tentamensförberedande uppgiften

Dessa uppgifter utgör extra övningsmaterial inför tentan. De är frivilliga, löses hemma, och lämnas inte in för rättning. Istället går vi igenom dem på räkneövningen den 19 oktober.

5. Finn avståndet mellan punkten $P = (1,1,1)$ och planet E som innehåller punkten $A = (0,-2,0)$ och linjen $L : (x,y,z) = (-4,0,0) + t(3,0,-1)$, $t \in \mathbb{R}$.

6. (a) Visa att matriserna

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B_4 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

bildar en bas $\underline{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ i vektorrummet $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Ange koordinatvektorn för matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i basen $\underline{B}$.

7. Den linjära operatorn $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges som projektion på planet $E : x + 2y + 3z = 0$ parallellt med linjen $L : (x,y,z) = t(3,-1,0)$, $t \in \mathbb{R}$. Finn p:s matris, samt vektorn $p(v)$ för $v = (-1,-1,2)$.

8. Den linjära operatorn s_α på $\mathbb{R}^2$ ges som spegling i den linje L_α genom origo som bildar vinkeln α med den positiva x-axeln. Den linjära operatorn r_β på $\mathbb{R}^2$ ges som rotation moturs kring origo med vinkel β. Givet en vinkel α, finn vinkeln β så att $s_\alpha = r_\beta s_0$.

Lösningar till andra tentamensförberedande uppgiften 2011 - 10 - 17

5. Planet E innehåller punkten $A = (0,-2,0)$, punkten $B = (-4,0,0)$ som även ligger på L, samt L:s riktningsvektor $v = (3,0,-1)$. Alltså är

$$\vec{AB} \times v = (-4,2,0) \times (3,0,-1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (-2,-4,-6)$$

normalvektor till E. Vi föredrar dock

$$n = -\frac{1}{2}(-2,-4,-6) = (1,2,3)$$

som normalvektor till E. Tillsammans med $A \in E$ får vi E:s ekvation

$$1(x-0) + 2(y+2) + 3(z-0) = 0$$ på punktnormalform, respektive

$$E: \quad x + 2y + 3z + 4 = 0$$ på standardform.

Avståndsformeln ger

$$D = D(P,E) = \frac{|1+2+3+4|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{10}{14}\sqrt{14} = \frac{5}{7}\sqrt{14}.$$

Svar. $D = \frac{5}{7}\sqrt{14}$.

6. (a) $\underline{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ är en <u>bas</u> i $\mathbb{R}^{2\times 2}$ (enligt definition) om $\underline{B}$ är linjärt oberoende och spänner upp $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

$\underline{B}$ är <u>lo</u> (enligt definition) om ekvationen

$$c_1 B_1 + c_2 B_2 + c_3 B_3 + c_4 B_4 = 0 \qquad (*_0)$$

har <u>endast</u> den triviala lösningen $(c_1, \ldots, c_4) = (0,0,0,0)$.

Antag att (c_1, c_2, c_3, c_4) är någon lösning till $(*_0)$. Då gäller

$$\begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 & c_2 + 2c_3 + 3c_4 \\ c_3 + 2c_4 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alltså löser (c_1, c_2, c_3, c_4) det linjära ekvationssystemet med totalmatris

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ & 1 & 2 & 3 & 0 \\ & & 1 & 2 & 0 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ & 1 & 2 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & 0 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ dvs}$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \end{cases}.$$

$\underline{B}$ <u>spänner upp</u> $\mathbb{R}^{2\times 2}$ (enligt definition) om ekvationen

$$c_1 B_1 + c_2 B_2 + c_3 B_3 + c_4 B_4 = W \qquad (*_W)$$

<u>är lösbar för varje</u> $W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Givet $W \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, så är $(*_W)$ lösbar omm

$$\begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 & c_2 + 2c_3 + 3c_4 \\ c_3 + 2c_4 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$$ är lösbar omm

det linjära ekvationssystemet med totalmatris

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & w_{11} \\ & 1 & 2 & 3 & w_{12} \\ & & 1 & 2 & w_{21} \\ & & & 1 & w_{22} \end{array}\right)$$

är lösbar. Detta är fallet, då trappan slutar horisontellt.

(b) Koordinatvektorn för matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i basen $\underline{B}$ är (enligt definition) den entydiga lösningen (c_1, c_2, c_3, c_4) till ekvationen

$$c_1 B_1 + c_2 B_2 + c_3 B_3 + c_4 B_4 = A \qquad (*_A)$$

Enligt resonemanget ovan (sätt $W = A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$) är detta den entydiga lösningen till det linjära ekvationssystemet med totalmatris

$$\underset{(-4)\ (-3)\ (-2)}{}\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ & 1 & 2 & 3 & 2 \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \underset{(-3)\ (-2)}{}\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ & 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 & -1 \\ & & & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \underset{(-2)}{}\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 & -1 \\ & & & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 & -1 \\ & & & 1 & 1 \end{array}\right),$$ dvs

$$\begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = -1 \\ c_4 = 1 \end{cases}.$$

Svar (b). $$\underbrace{(A)_{\underline{B}}}_{} = (-1, 1, -1, 1)$$

Notation: Koordinatvektorn för A i basen $\underline{B}$

Kontroll. $$-B_1 + B_2 - B_3 + B_4 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

7. $[p] = \big(p(e_1) \,|\, p(e_2) \,|\, p(e_3)\big)$, där $p(e_j)$ är skärningspunkten mellan linjen

$$L_j : (x,y,z) = e_j + t\,(3,-1,0) \ , \ t \in \mathbb{R}$$

och planet E.

$L_1 : (x,y,z) = (1,0,0) + t\,(3,-1,0) = (1+3t, -t, 0)$ skär E då

$1+3t-2t = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow p(e_1) = (-2,1,0)$.

$L_2 : (x,y,z) = (0,1,0) + t\,(3,-1,0) = (3t, 1-t, 0)$ skär E då

$3t + 2(1-t) = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow p(e_2) = (-6,3,0)$.

$L_3 : (x,y,z) = (0,0,1) + t\,(3,-1,0) = (3t, -t, 1)$ skär E då

$3t - 2t + 3 = 0 \Rightarrow t = -3 \Rightarrow p(e_3) = (-9,3,1)$.

Därmed är $[p] = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -9 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, och $p(-1,-1,2) = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -9 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Svar. $[p] = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -9 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $p(-1,-1,2) = (-10,2,2)$.

8. Givet en vinkel α, så söker vi vinkeln β så att $s_\alpha = r_\beta s_0$.

Lösning. $s_\alpha = r_\beta s_0 \iff [s_\alpha] = [r_\beta s_0]$

$$\iff [s_\alpha] = [r_\beta][s_0]$$

$$\underset{F14}{\iff} \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$\iff \beta = 2\alpha + 2\pi \cdot m \text{ för något } m \in \mathbb{Z}.$$

Svar. $\beta = 2\alpha$ duger.

M.a.o. gäller $s_\alpha = r_{2\alpha} s_0$, dvs. speglingen i linjen L_α är sammansättningen av speglingen i x-axeln och rotationen med vinkel 2α.

2011-08-16 : 3. Lös determinantekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & x & 1 \\ 0 & 1 & x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & 1 & x \\ x & 1 & x & 1 \\ 1 & x & x & 1 \\ x & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

Lösning.

$$\begin{array}{c} \\ (1) \\ (1) \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & x & 1 & x \\ x & 1 & x & 1 \\ 1 & x & x & 1 \\ x & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{array}{c} (-1) \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1+x & 1+x & 1+x & 1+x \\ x & 1 & x & 1 \\ 1 & x & x & 1 \\ 1+x & 1+x & 1+x & 1+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ (-1) \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & x & 1 \\ 0 & 1 & x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & x & 1 \\ 0 & 1 & x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{1 & 0 & 0 & 0 & 0} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} (-1) \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 1 \\ 1 & x & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ (-1) \end{array} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ 1 & x-1 & -1 \\ \boxed{1 & 0 & 0} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ x-1 & -1 \end{vmatrix} = -\left(-1-(x-1)^2\right)$$

$$= 1 + (x-1)^2 \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ekvationens vänsterled är ≥ 1 $\forall x \in \mathbb{R}$, medan ekvationens högerled är $= 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Svar. Ekvationen saknar lösning.

Extra uppgift. Matrisen A i vänsterledet ovan är inverterbar $\forall x \in \mathbb{R}$, då $\det(A) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Finn elementet $(A^{-1})_{15}$ för varje värde på x.

Lösning. $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)} C^T$ medför att

$$(A^{-1})_{15} = \left(\frac{1}{\det(A)} C^T\right)_{15} = \frac{1}{\det(A)} (C^T)_{15} = \frac{1}{\det(A)} C_{51} = \frac{1}{\det(A)} M_{51} =$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 1 \\ 1 & x & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{se ovan}}{=} \frac{1}{\det(A)} \det(A) = 1$$

Svar. $(A^{-1})_{15} = 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

2010-01-12 : 6. Visa att olikheten

$$(v^T A^T A w)^2 \leq (v^T A^T A v)(w^T A^T A w)$$

gäller för alla kvadratiska matriser $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ och alla kolonner $v, w \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Bevis. $v^T A^T = (Av)^T$ och $w^T A^T = (Aw)^T$ medför att

$$(v^T A^T A w)^2 = ((Av)^T A w)^2 = (Av \cdot Aw)^2 =$$

$$= |Av \cdot Aw|^2 \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} (\|Av\| \, \|Aw\|)^2 = \|Av\|^2 \|Aw\|^2 =$$

$$= (Av \cdot Av)(Aw \cdot Aw) = ((Av)^T Av)((Aw)^T Aw)$$

$$= (v^T A^T A v)(w^T A^T A w)$$

$\square$

Obs. att $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = x^T y$ gäller för alla kolonner $x, y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.