Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Ernst Dieterich

Civilingenjörsprogrammen F och W
Kandidatprogrammet i matematik
Vårterminen 2011

Prov i matematik
Linjär algebra II, 5hp
2011–02–09

Skrivtid: 14.00–16.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.

1. (a) När kallas en delmängd U till ett vektorrum V för *delrum*? Återge definitionen!

(b) Vilka av de följande delmängderna $U_i \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ är delrum? Motivera ditt svar!

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A \text{ är diagonalmatris}\},\\
U_2 &= \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A \text{ är symmetrisk}\},\\
U_3 &= \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A \text{ är inverterbar}\},\\
U_4 &= \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A \text{ är ej inverterbar}\}.
\end{aligned}$$

2. (a) När kallas en följd $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ av vektorer i ett vektorrum V för en *bas* i V? Återge definitionen!

(b) Visa att följden $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en bas i $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(c) Finn koordinatkolonnen för en godtycklig vektor $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ i basen $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

3. Låt $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 12 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 10 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 15 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Finn en bas i kolonnrummet $K(A)$ bland A:s kolonner.

(b) Ange koordinatkolonnen för A:s femte kolonn i denna bas.

(c) Vilken dimension har radrummet $R(A)$?

(d) Vilken dimension har nollrummet $N(A)$?

Var god vänd!

4. Låt $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Finn en inverterbar matris T och en diagonalmatris D så att $T^{-1}AT = D$.

(b) Ange A^{16} och A^{17}.

Lycka till!