UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
ERNST DIETERICH

CIVILINGENJÖRSPROGRAMMET ES
KANDIDATPROGRAMMET I MATEMATIK
LÄRARPROGRAMMET, FRISTÅENDE KURSER

Prov i matematik
Linjär algebra och geometri I, 5hp
2011–09–23

Skrivtid: 8.00–10.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.

1. Bestäm koefficienterna a, b, c, d så att kurvan $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ går genom punkterna $(-1, 0), (1, 0), (2, 4)$ och $(3, 4)$.

2. Lös matrisekvationen $AX = XA$ för $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Givet $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, skriv både A^{-1} och A som produkt av elementärmatriser.

4. Givet $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, finn

(a) minorernas matris M,

(b) kofaktormatrisen C,

(c) adjungatan $\operatorname{adj}(A)$,

(d) determinanten $\det(A)$

(e) inversen A^{-1}.

LYCKA TILL!

Lösningar till duggan 2011-09-23

1. Kurvan $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ går genom punkterna $(-1,0)$, $(1,0)$, $(2,4)$ och $(3,4)$ omm a, b, c, d löser ekvationssystemet

$$\begin{cases} a - b + c - d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ a + 2b + 4c + 8d = 4 \\ a + 3b + 9c + 27d = 4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ \frac{1}{2}\cdot \\ \\ \frac{1}{4}\cdot \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 28 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ \\ \\ \frac{1}{6}\cdot \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & -3 \\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 \\ & & & 1 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & -3 \\ & 1 & & & \frac{5}{6} \\ & & 1 & & 3 \\ & & & 1 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Svar. $(a, b, c, d) = \left(-3, \frac{5}{6}, 3, -\frac{5}{6}\right)$

2. Om X löser $AX = XA$, då är $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. För alla $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ gäller

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b & b+c \\ d & d+e & e+f \\ g & g+h & h+i \end{pmatrix}$$

Alltså är

$$AX = XA \iff \begin{cases} a+d = a \\ b+e = a+b \\ c+f = b+c \\ d+g = d \\ e+h = d+e \\ f+i = e+f \\ g = g \\ h = g+h \\ i = h+i \end{cases} \iff \begin{cases} d = 0 \\ e = a \\ f = b \\ g = 0 \\ h = d \\ i = e \\ 0 = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases}$$

$$\iff \quad X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

__Svar.__ $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

3. $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\frac{1}{3}\cdot \qquad (-2)$$

$$\| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \|$$

$$E_1 A \qquad E_2 E_1 A \qquad E_3 E_2 E_1 A$$

med $E_1 = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & & -2 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$$E_3 E_2 E_1 A = I \Rightarrow E_3 E_2 E_1 = A^{-1} \quad \text{och} \quad A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1}$$

__Svar.__ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & -2 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ exempelvis

$A = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 2 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ exempelvis

4. (a) $M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18$, $M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$, $M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -12$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -10$, $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2$, $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$, $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$

$$M = \begin{pmatrix} 18 & 0 & -12 \\ -10 & -2 & 5 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) $$C = \begin{pmatrix} 18 & 0 & -12 \\ 10 & -2 & -5 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) $$adj(A) = C^T = \begin{pmatrix} 18 & 10 & -6 \\ 0 & -2 & 0 \\ -12 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

(d) $$det(A) = A_{21}C_{21} + A_{22}C_{22} + A_{23}C_{23} = 0 \cdot 10 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot (-5) = -6$$

(e) $$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A) = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 18 & 10 & -6 \\ 0 & -2 & 0 \\ -12 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{5}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$