Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Ernst Dieterich

Civilingenjörsprogrammen IT och STS
Vårterminen 2012

# Prov i matematik
# Linjär algebra II, 5hp
# 2012–02–03

*Skrivtid: 8.00–10.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.*

1. (a) Visa att mängden $S = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A^T = -A\}$ är ett delrum i $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

(b) Finn en bas i $S$. (Motivera ditt påstående!)

(c) Ange $\dim(S)$.

2. (a) Visa att polynomen $p_1(x) = 2 + x + x^2 + x^3$, $p_2(x) = 1 + 2x + x^2 + x^3$, $p_3(x) = 1 + x + 2x^2 + x^3$, $p_4(x) = 1 + x + x^2 + 2x^3$ bildar en bas $\underline{p}$ i vektorrummet $\mathcal{P}_3$.

(b) Finn koordinatvektorn för polynomet $q(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ i denna bas $\underline{p}$.

3. Låt $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -8 & -11 & -2 \\ 1 & 1 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 14 & 19 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Finn en bas i kolonnrummet $K(A)$ bland $A$:s kolonner.

(b) Ange koordinatkolonnen för $A$:s fjärde kolonn i denna bas.

(c) Finn en bas i nollrummet $N(A)$.

(d) Vilken dimension har radrummet $R(A)$?

4. Den linjära operatorn $f$ på $\mathbb{R}^3$ ges av

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Ange $f$:s matris $A$.

(b) Finn en bas $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\mathbb{R}^3$ som består av idel egenvektorer till $A$.

(c) Tolka operatorn $f$ geometriskt.

Lycka till!

# Lösningar till duggan 2012-02-03

1. (a) (DR1) $0 \in S$, då $0^T = 0 = -0$.

(DR2) $A, B \in S \Rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B) \Rightarrow A+B \in S$.

(DR3) $c \in \mathbb{R}, A \in S \Rightarrow (cA)^T = c(A^T) = c(-A) = -cA \Rightarrow cA \in S$.

Delmängden $S \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$ är ett delrum, då (DR1)-(DR3) är uppfyllda.

(b) En allmän matris $A \in S$ har formen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} & 1 & \\ -1 & & \\ & & \end{pmatrix}}_{B_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ -1 & & \end{pmatrix}}_{B_2} + c \underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & 1 \\ & -1 & \end{pmatrix}}_{B_3}.$$

Alltså är $\operatorname{span}\{B_1, B_2, B_3\} = S$. Dessutom är $\underline{B} = (B_1, B_2, B_3)$ linjärt oberoende:

$$c_1 B_1 + c_2 B_2 + c_3 B_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_2 \\ -c_1 & 0 & c_3 \\ -c_2 & -c_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

Matrisföljden $\underline{B} = (B_1, B_2, B_3)$ är en bas i $S$, då den är genererande och linjärt oberoende.

(c) $\dim(S) = \text{längd}(\underline{B}) = 3$.

2. (a) Vi vet att $\underline{X} = (1, X, X^2, X^3)$ är en bas i $\mathcal{P}_3$. Enligt Sats är

$\underline{p} = (p_1, \dots, p_4)$ en bas i $\mathcal{P}_3$ omm $T_{\underline{X}\underline{p}} = \left( [p_1]_{\underline{X}} \middle| \dots \middle| [p_4]_{\underline{X}} \right)$ är inverterbar.

$$T_{\underline{X}\underline{p}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ har determinanten

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

$\det(T_{\underline{X}\underline{p}}) = 5 \Rightarrow T_{\underline{X}\underline{p}}$ är inverterbar $\Rightarrow \underline{p}$ är en bas i $\mathcal{P}_3$.

(b) $$[q]_{\underline{p}} = T_{\underline{p}\underline{X}} [q]_{\underline{X}} = (T_{\underline{X}\underline{p}})^{-1} [q]_{\underline{X}}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Svar (b). $(q)_{\underline{p}} = (-1, 0, 1, 2)$.

3. (a)

$$A \sim \begin{matrix} (-3)\,(-2) \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 11 & 2 \\ 3 & 2 & 14 & 19 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} \\ (-1)\,(1) \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \begin{matrix} \\ \\ (-2)\,(2) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ & 1 & 4 & 5 & 0 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = T$$

$T_{\cdot 1}, T_{\cdot 2}, T_{\cdot 5}$ är $T$:s pivotkolonner $\Rightarrow$ $\underline{a} = (A_{\cdot 1}, A_{\cdot 2}, A_{\cdot 5})$ är en bas i $K(A)$.

(b) $$[A_{\cdot 4}]_{\underline{a}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(c) $N(A) = N(T)$.

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 3x_4 \\ x_2 = -4x_3 - 5x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Sätt $x_3 = s$, $x_4 = t$.

$$N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} -2s-3t \\ -4s-5t \\ s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b_1} + t \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b_2} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$= \operatorname{span}\{b_1, b_2\}$. Desutom är $b_1, b_2$ linjärt oberoende.

Alltså är $(b_1, b_2)$ en bas i $N(A)$.

(d) $\dim(R(A)) = \operatorname{radrang}(A) = 3$.

4. (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} =$

$= \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)^2$ löses av $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$.

$E(0) = N(0I - A)$. $-A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$

Sätt $x_3 = t$.

$E(0) = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{b_1} \right\}$.

$E(1) = N(I - A)$. $I - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x_1 = -x_2 - x_3$

Sätt $x_2 = s$, $x_3 = t$.

$E(1) = \left\{ \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b_2} + t \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b_3} \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\{b_2, b_3\}$.

$\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ <u>är en bas i</u> $\mathbb{R}^3$ <u>som består av idel egenvektorer till</u> $A$.

(c) $\left. \begin{array}{l} A b_1 = 0 \\ A b_2 = b_2 \\ A b_3 = b_3 \end{array} \right\}$ <u>visar att</u> $f$ <u>är projektionen på planet</u> $P = E(1) = \operatorname{span}\{b_2, b_3\}$ <u>parallellt med linjen</u> $L = E(0) = \operatorname{span}\{b_1\}$.