UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Darpö

Prov i matematik
X, Xbio
Linjär algebra II
2009-04-15

Skrivtid 8–13. Hjälpmedel: Skrivdon. Varje uppgift ger maximalt sex poäng. För full poäng krävs tydligt motiverade lösningar. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs minst 16, 23 respektive 30 poäng totalt.

1. Låt
$$U = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{E}^4.$$

a) Bestäm en ON-bas $\underline{b}$ i U.

b) Utvidga $\underline{b}$ till en ON-bas i $\mathbb{E}^4$.

c) Visa att de vektorer du lade till i b) bildar en ON-bas i det ortogonala komplementet $U^\perp \subset \mathbb{E}^4$ till U.

2. Avgör om följande avbildningar är linjära. I de fall de är det, bestäm baser i nollrum och värderum.

a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ F(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -2x_1 + 4x_3 \end{pmatrix}$,

b) $G : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \langle x, x \rangle$,

c) $H : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x) \mapsto \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f(0) \end{pmatrix}$.

(Kom ihåg att $\mathcal{P}_n$ betecknar vektorrummet av alla polynom av grad mindre än eller lika med n.)

3. a) Ge definitionen av en bas i ett linjärt rum.

b) Avgör för vilka värden på konstanten $a \in \mathbb{R}$ som
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$$
bildar en bas i $\mathbb{R}^3$.

c) Om $a = 0$ så är $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ från b) en bas i $\mathbb{R}^3$. Bestäm matrisen för koordinatbytet från standardbasen $\underline{e}$ till $\underline{v}$ (d v s den matris T som uppfyller $[x]_{\underline{v}} = T[x]_{\underline{e}}$ för alla $x \in \mathbb{R}^3$).

V.g.v.

4. Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som geometriskt beskrivs som projektion på planet $\pi = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\}$ längs linjen $l = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$.

a) Bestäm matrisen för F i standardbasen.

b) Bestäm matrisen i standardbasen för den linjära avbildning $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som geometriskt beskrivs som projektion på linjen l parallellt med planet π.

5. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges i standardbasen av matrisen A. Bestäm egenvärdena till F, samt baser i motsvarande egenrum.

b) Bestäm signaturen av den kvadratiska formen $q(x) = x^t A x$.

c) Lös följande system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + \sqrt{2}z(t) \\ y'(t) &= -y(t) \\ z'(t) &= \sqrt{2}x(t) \end{cases}, \quad x(0) = 0, \ \ y(0) = z(0) = 1.$$

6. a) Visa att $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ definierar en skalärprodukt på $\mathcal{P}_2$.

b) Bestäm projektionen av $f(x) = x^2$ på underrummet $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$ med avseende på denna skalärprodukt.

Kom ihåg: En funktion $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ är en skalärprodukt på vektorrummet V om följande villkor är uppfyllda för alla $u, v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

(SP1) $\varphi(u + v, w) = \varphi(u, w) + \varphi(v, w)$,

(SP2) $\varphi(\lambda u, v) = \lambda\varphi(u, v)$

(SP3) $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$,

(SP4) $\varphi(u, u) \neq 0$ om $u \neq 0$.

Lycka till!

Svar till tentamen i Linjär algebra II 2009-04-15

1. a) Exempelvis $\underline{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

b) Lägg till exempelvis $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. a) Ja. $\mathcal{N}(F) = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$, $\mathcal{V}(F) = \mathbb{R}^2$.

b) Nej. Homogenitetsvillkoret $G(\lambda x) = \lambda G(x)$ är exempelvis inte uppfyllt.

c) Ja. $\mathcal{N}(H) = [x^2, x^3]$, $\mathcal{V}(H) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$.

3. a) En bas i ett vektorrum V är en följd vektorer $(v_1 \dots, v_n)$ som är linjärt oberoende och spänner upp V.

b) $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$ om och endast om $a \neq \pm 1$.

c) $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. a) $[F]_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} en & massa \\ tal & har \end{pmatrix}$

b) $[G] = I - [F] = \dots$

5. a) Egenvärdena är $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 2$. Egenrummen

$$\mathcal{E}_{-1}(F) = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad \mathcal{E}_2(F) = \left[\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

b) $\operatorname{sign}(q) = (1, -1, -1)$.

c) $\begin{cases} x(t) = & \frac{\sqrt{2}}{3} \left(e^{2t} - e^{-t} \right) \\ y(t) = & e^{-t} \\ z(t) = & \frac{1}{3} \left(e^{2t} + 2e^{-t} \right) \end{cases}$