Problemsamling i Linjär Algebra II

Erik Darpö

Notation

$\subset$	Inklusion. Samma som $\subseteq$.
$A \sim B$	Matriserna A och B är radekvivalenta.
$\mathbb{I}_n$	Enhetsmatrisen av storlek $n \times n$.
$\mathbb{R}^n$	Vektorrummet av alla kolonnvektorer av storlek n.
$\mathbb{R}[x]$	Vektorrummet av alla polynom i variabeln x.
$\mathbb{R}[x]_n$	Vektorrummet av alla polynom i variabeln x av grad $\leqslant n$.
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Vektorrummet av alla $m \times n$-matriser.
$C(\mathbb{R})$	Vektorrummet av alla kontinuerliga funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
A^t	Transponatet av matrisen A.
$[v_1, \ldots, v_l]$	Det linjära höljet av vektorerna $v_1, \ldots, v_l$.
$[M]$	Det linjära höljet av mängden M.
$\underline{e}$	Standardbasen i $\mathbb{R}^n$.
$[v]_{\underline{b}}$	Koordinatvektorn för vektorn v i basen $\underline{b}$.
$[F]_{\underline{v}\,\underline{u}}$	Matrisen för avbildningen F i baserna $\underline{u}$ och $\underline{v}$.
$[F]_{\underline{v}}$	$[F]_{\underline{v}\,\underline{v}}$
$\mathcal{N}(F)$	Nollrummet av den linjära avbildningen F.
$\mathcal{V}(F)$	Värderummet av den linjära avbildningen F.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalärprodukt.
$\bullet$	Standardskalärprodukten i $\mathbb{R}^n$.
$\mathbb{E}^n$	Vektorrummet $\mathbb{R}^n$ utrustat med standardskalärprodukten.
$M^\perp$	Ortogonala komplementet till M.
P_U	Ortogonala projektionen på underrummet U.
$T_{\underline{v}\,\underline{u}}$	Matrisen för koordinatbytet från $\underline{u}$ till $\underline{v}$ (d v s den matris T som uppfyller $[x]_{\underline{v}} = T[x]_{\underline{u}}$).
$\mathcal{E}_\lambda(F)$	Egenrummet till F med egenvärde λ.
$\text{sign}(q)$	Signaturen av den kvadratiska formen q.

Innehåll

Förord

Detta häfte innehåller övningsuppgifter till kursen Linjär Algebra II vid Uppsala Universitet. Målsättningen har varit att göra ett material som innehåller såväl enkla instuderingsuppgifter och “standarduppgifter” som mer teoretiskt avancerade problem, i tillräcklig mängd för att kunna användas självständigt som övningsmaterial på kursen. Ett antal lösta exempel av typtalskaraktär ingår också. Ett förberedande kapitel tar upp linjära ekvationssystem och grundläggande matris- och determinantkalkyl, som är nödvändiga förkunskaper för Linjär Algebra II.

Denna första version av materialet är något preliminär (bland annat saknas facit till några av uppgifterna). Synpunkter, rättelser och kritik mottages tacksamt av författaren, på e-post `erik.darpo@math.uu.se`.

Uppsala 2 september 2009
Erik Darpö

0. Förberedelser

1. Lös nedanstående ekvationssystem:

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} w + 2x + y + z = 0 \\ w - x + 2y + z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2y - z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = 1 \\ 2w + 4x + 5y + z = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} w + 2x - y + z = 1 \\ -2w + x + 2y - z = 2 \\ 4w + 3x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$

2. Beräkna $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2- & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

3. Beräkna determinanterna av följande matriser:

a) $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -1 & x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

d) $D = \begin{pmatrix} x_1 & a & a & \dots & a \\ 0 & x_2 & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & a \\ 0 & 0 & \dots & \dots & x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad n \geqslant 2\,.$

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad a \in \mathbb{R}\,,\ n \geqslant 2\,.$

4. Bestäm inversen av matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Lös matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Låt $S = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

a) Visa att S är inverterbar, och ange dess invers.

b) Bestäm alla 2×2-matriser X som uppfyller ekvationen $SXS^{-1} = 4\mathbb{I}_2$.

7. För vilka värden på $x \in \mathbb{R}$ är matrisen $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$ inverterbar? Bestäm A^{-1} för alla sådana x.

8. Visa att ett ekvationssystem med fler obekanta än ekvationer aldrig kan ha entydig lösning.

1. Vektorrum, underrum

9. Vilka av följande mängder är vektorrum? Verifiera!

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{C}$

c) Mängden

$$\{f : X \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ för högst ändligt många } x \in X\}$$

med addition $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ och skalärmultiplikation $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ (där X är någon fix mängd).

d) Mängden

$$\{f : X \to \mathbb{R} \mid \exists x \in X : f(x) \neq 0\}$$

(med vektorrumsoperationer som i förra exemplet).

e) $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + 7x_3 \neq 0\}$

f) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = Bx\}$ där $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ är två fixa matriser.

g) $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leqslant 1\}$

10. Visa att:

a) Mängden $\mathbb{R}[x]$ av (reella) polynom i variabeln x är ett vektorrum.

b) För varje matris $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ är mängden $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ ett underrum av $\mathbb{R}^n$.

c) Mängden $\mathbb{R}^{n\times n}_{ant} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^t = -A\}$ är ett vektorrum. *(Tips: Visa att den är ett underrum av ett känt vektorrum.)*

11. Visa att om M och N är underrum av ett vektorrum V, så är även $M \cap N$ ett underrum av V.

2. Linjärt hölje, linjärt beroende och oberoende

Exempel 1: Låt $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$ och $h(x) = 1 + x$. Bestäm underrummet av $\mathbb{R}[x]$ som spänns upp av f, g och h. Avgör om f, g, h är linjärt beroende eller oberoende.

Lösning: En godtycklig linjärkombination av f, g och h har formen

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x) + \lambda_3 h(x) = (\lambda_2 + \lambda_3) + (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)x$$

och har alltså grad högst ett. För ett allmänt förstagradspolynom $p(x) = a + bx$ gäller $p(x) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x) + \lambda_3 h(x)$ om och endast om

$$\begin{cases} \phantom{\lambda_1 - {}} \lambda_2 + \lambda_3 = a \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = b \end{cases}$$

vilket är ekvivalent med

$$\begin{cases} \lambda_1 = a + b - 2t, \\ \lambda_2 = a - t, & \qquad t \in \mathbb{R}. \\ \lambda_3 = t, \end{cases}$$

Eftersom systemet alltid är lösbart gäller alltså $p \in [f, g, h]$ för varje förstagradspolynom p, och $[f, g, h] = \mathbb{R}[x]_1$.

Ekvationen $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x) + \lambda_3 h(x) = 0$ har de icke-triviala lösningarna

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

så f, g, h är linjärt beroende. □

Exempel 2: Avgör för vilka värden på konstanten $a \in \mathbb{R}$ som följden $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\mathbb{R}^3$ är linjärt oberoende.

Lösning: Följden är linjärt oberoende om och endast om ekvationen $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ enbart har den triviala lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Totalmatrisen för ekvationen är $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, och dess determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = 1 + a - a^2 = -\left(a - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(a - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

Nu är följden linjärt oberoende $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. □

12. Vilka av följande mängder spänner upp $\mathbb{R}^3$?

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} \right\}$, b) $\left\{ \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}$,

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} \right\}$, d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\2\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\0\\-1 \end{pmatrix} \right\}$.

13. Vilka av mängderna a) – d) i uppgift 12 är linjärt oberoende?

14. För vilka värden på den reella konstanten b är vektorerna

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\-1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1\\2+b\\-1-b\\2 \end{pmatrix}$$

i $\mathbb{R}^4$ linjärt oberoende?

15. Delrummet M av $\mathbb{R}^4$ spänns upp av vektorerna

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1\\-1\\0\\1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2\\1\\1\\-1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0\\3\\1\\-3 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1\\2\\3\\1 \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} 1\\-1\\2\\4 \end{pmatrix}.$$

Avgör för vilka värden på konstanten $a \in \mathbb{R}$ som vektorn $v = \begin{pmatrix} 4\\a+3\\5\\a-4 \end{pmatrix}$ tillhör delrummet M.

16. Underrummen $U \subset W \subset \mathbb{R}^3$ definieras som

$$U = \left[\begin{pmatrix} 1\\-1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\0\\1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{och} \quad W = \left[\begin{pmatrix} 1\\-1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\0\\1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\\-1\\0 \end{pmatrix} \right].$$

Avgör om inklusionen $U \subset W$ är äkta, eller en likhet. Är inklusionen $W \subset \mathbb{R}^3$ äkta?

17. Låt M och N vara underrum av $\mathbb{R}^4$ definierade genom

$$M = \left[\begin{pmatrix} 1\\2\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\1\\3\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\7\\3\\-1 \end{pmatrix} \right], \; N = \left[\begin{pmatrix} 0\\1\\2\\-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\3\\-1\\6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\5\\3\\0 \end{pmatrix} \right].$$

Bestäm en nollskild vektor $u \in \mathbb{R}^4$ sådan att $u \in M \cap N$.

18. Låt $u_1 = \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\-1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2\\1\\1\\1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1\\-1\\2\\1 \end{pmatrix}$ och $N = [u_1, u_2, u_3]$.

a) Avgör om vektorerna $v = \begin{pmatrix} 0\\-2\\2\\-11 \end{pmatrix}$ och $w = \begin{pmatrix} 2\\1\\2\\1 \end{pmatrix}$ tillhör N.

b) Avgör för vilka värden på konstanten $a \in \mathbb{R}$ som vektorn $u = \begin{pmatrix} 2-a\\1-2a\\2\\1 \end{pmatrix}$ tillhör N.

c) Beskriv N som lösningsmängden till ett homogent linjärt ekvationssystem i fyra obekanta.

19. Låt u_1, u_2, v_1, v_2 vara vektorer i ett vektorrum V, sådana att

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 + v_2, \\ u_2 &= v_1 + 2v_2. \end{aligned}$$

Visa att u_1, u_2 är linjärt oberoende om och endast om v_1, v_2 är linjärt oberoende.

20. Avgör om följden $x - 1,\ x^2 - x,\ x^3 - x^2$ i $\mathbb{R}[x]_3$ är linjärt beroende eller oberoende.

21. Visa att för varje följd av vektorer $v_1, \ldots, v_l \in V$ i ett vektorrum är följande två påståenden ekvivalenta:

(i) Vektorn v_j är en linjärkombination av de övriga: $v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots v_l$,

(ii) $[v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots v_l] = [v_1 \ldots v_l]$.

3. Bas, dimension

Exempel 3: Bestäm en bas i lösningsrummet $L \subset \mathbb{R}^4$ till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3\,, \\ x_2 + x_3 = x_4\,. \end{cases}$$

Lösning: Vi har $x \in L \;\Leftrightarrow\; Ax = 0$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ger lösningen $x = \begin{pmatrix} 2s-t \\ -s+t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$.

Då $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ är linjärt oberoende, bildar dessa en bas i L. $\square$

Exempel 4: Underrrummet M av $\mathbb{R}^4$ spänns upp av vektorerna

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\; u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\; u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\; u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Finn en bas i M bland dessa vektorer.

b) För vilka värden på konstanten $a \in \mathbb{R}$ tillhör vektorn $v = \begin{pmatrix} 3+a \\ 3 \\ 3+a \\ 2+2a \end{pmatrix}$ underrummet M? Ange, för dessa värden på a, koordinaterna för vektorn v i den bas som du valde i del a) av uppgiften.

Lösning: Vi löser båda delarna av uppgiften samtidigt. Vektorn $v \in \mathbb{R}^4$ tillhör M om och endast om det finns reella tal $\lambda_1, \ldots, \lambda_5 \in \mathbb{R}$ sådana att

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 + \lambda_5 u_5 = v\,.$$

Detta är ekvivalent med att det linjära ekvationssystemet

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+a \\ 3 \\ 3+a \\ 2+2a \end{pmatrix} \tag{1}$$

är lösbart.

Systemet löses med Gaußelimination:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3+a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 3+a \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2+2a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & a-3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array}\right)$$

Detta system är lösbart om och endast om $a + 2 = 0$, d v s om och endast om $a = -2$. Det följer att $v \in M \Leftrightarrow a = -2$. Dessutom är $\dim M$ lika med rangen av koefficientmatrisen, d v s 3.

I den sista matrisen har vi pivotelement i kolonn 1, 2 och 4 vilket medför att $\underline{u} = (u_1, u_2, u_4)$ utgör en bas i M.

Antag nu att $a = -2$. Den sista matrisen reduceras då till

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

med lösningarna $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2s-t \\ 2+s-2t \\ s \\ 3+3t \\ t \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$. Detta ger alla möjliga lösningar till ekvationssystemet (1) i fallet då $a = -2$. Speciellt, om vi väljer $s = t = 0$ får vi lösningen $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 = 3,\ \lambda_5 = 0$. Insatt i ekvationen (1) ger detta

$$(-2)\, u_1 + 2\, u_2 + 3\, u_4 = v$$

om $a = -2$. (Hur syns detta direkt i den sista matrisen?)

Svar: a) $\underline{u} = (u_1, u_2, u_4)$ utgör en bas i M.
b) $v \in M \Leftrightarrow a = -2$. I detta fall är $[v]_{\underline{u}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. □

22. Vilka av mängderna i uppgift 12 utgör baser i $\mathbb{R}^3$?

23. Låt

$$U = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \text{ och } x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Finn en bas i U.

24. Givet $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, finn $w \in \mathbb{R}^3$ så att (u, v, w) bildar en bas i $\mathbb{R}^3$.

25. Delrummen M och N av $\mathbb{R}^4$ ges av

$$M = \left[\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right],$$
$$N = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid 7x_1 + 4x_2 - 23x_4 = 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0\right\}.$$

Bestäm en bas i $M \cap N$.

26. Låt $U \subset \mathbb{R}^4$ vara det linjära höljet av vektorerna

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en bas i U, och ange koordinaterna för $v_1, \ldots, v_6$ i denna bas.

27. Låt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$. Visa att vektorerna

$$\begin{pmatrix} \lambda_1+\mu_1 \\ \lambda_2+\mu_1 \\ \lambda_3+\mu_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1+\mu_2 \\ \lambda_2+\mu_2 \\ \lambda_3+\mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1+\mu_3 \\ \lambda_2+\mu_3 \\ \lambda_3+\mu_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

är linjärt beroende.

28. Delrummet $M \subset \mathbb{R}^4$ spänns upp av vektorerna

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm en bas $\underline{b}$ för M bland de givna vektorerna.

b) Bestäm $a \in \mathbb{R}$ så att vektorn $v = \begin{pmatrix} -2a-5 \\ a+3 \\ a \\ a-1 \end{pmatrix}$ tillhör M.

c) Med konstanten $a \in \mathbb{R}$ som i b), bestäm koordinaterna för $v \in M$ i $\underline{b}$.

d) Utvidga $\underline{b}$ till en bas i $\mathbb{R}^4$.

29. Bestäm en bas i underrummet $U \subset \mathbb{R}[x]_3$ som spänns upp av

$$f_1(x) = x^2 + 1, \;\; f_2(x) = x + 2, \;\; f_3(x) = 2x^2 - x, \;\; f_4(x) = 2x^3 - 1\,.$$

Utvidga till en bas i $\mathbb{R}[x]_3$.

30. Låt $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, medan $v \in \mathbb{R}^3$ har koordinatvektorn $[v]_{\underline{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ med avseende på basen $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, där

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm koordinaterna för vektorn $u - v$ i standardbasen.

31. Låt

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Visa att $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ är en bas i $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

32. Låt u, v, w vara tre linjärt oberoende vektorer i ett vektorrum V, och a en reell konstant. Låt $U = [y_1, y_2, y_3]$, där

$$\begin{aligned} y_1 &= u + (a+1)v + w, \\ y_2 &= u + (3-a)v + aw, \\ y_3 &= au + 2v + (2-a)w. \end{aligned}$$

Bestäm $\dim U$ för varje värde på $a \in \mathbb{R}$.

33. Låt $\mathbb{R}^X$ beteckna vektorrummet av alla funktioner från mängden $X = \{1, 2, 3, 4\}$ in i $\mathbb{R}$. Bestäm en bas i $\mathbb{R}^X$, och beräkna koordinaterna i denna bas för funktionen $g : X \to \mathbb{R}$, som ges av

$$g(1) = -11, \qquad g(3) = -3/2,$$
$$g(2) = 7, \qquad g(4) = 5.$$

34. Bestäm dimensionen av rummet $\mathbb{R}^{3\times 3}_{ant} = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A^t = -A\}$ av antisymmetriska 3×3-matriser.

35. Låt U vara mängden av alla polynom i $\mathbb{R}[x]_4$ som är delbara med x^2+1. Visa att $U \subset \mathbb{R}[x]_4$ är ett underrum, och bestäm en bas i U.

36. Låt V vara ett ändligt genererat vektorrum, och $M, N \subset V$ underrum sådana att $V = [M \cup N]$. Visa att

$$\dim V = \dim M + \dim N - \dim(M \cap N).$$

37. Låt V vara ett vektorrum och $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ en bas i V. Visa att funktionen $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto [v]_{\underline{b}}$ är bijektiv och uppfyller

$$\begin{cases} \varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v), \\ \varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u), \end{cases} \qquad \text{för alla } u, v \in V, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. Linjära avbildningar

Exempel 5: Bestäm matrisen för den linjära avbildningen

$$F : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3,\ f(x) \mapsto xf''(x) + f(x)$$

i basen $\underline{b} = (1, x, x^2, x^3)$.

Lösning: Direkt beräkning ger

$$F(1) = 1, \qquad F(x) = x, \qquad F(x^2) = 2x + x^2, \qquad F(x^3) = 6x^2 + x^3$$

varvid

$$[F(1)]_{\underline{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [F(x)]_{\underline{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [F(x^2)]_{\underline{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [F(x^3)]_{\underline{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen för F blir därför

$$[F]_{\underline{b}} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [F(1)]_{\underline{b}} & [F(x)]_{\underline{b}} & [F(x^2)]_{\underline{b}} & [F(x^3)]_{\underline{b}} \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

38. Avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av $F(x) = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ -2x_1+x_2-x_3 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix}$.

a) Verifiera att F är linjär.

b) Bestäm den matris A som uppfyller $F(x) = Ax$ för alla vektorer $x \in \mathbb{R}^3$.

c) Visa hur bilderna av standardbasvektorerna kan avläsas i matrisen A.

39. Avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är linjär och uppfyller

$$F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestäm a) $F\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) $F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, och c) $F\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

40. Avgör vilka av följande avbildningar $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ som är linjära:

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_2x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}x_n \\ x_nx_1 \end{pmatrix}, \quad H(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \quad L(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ \vdots \\ nx_n \end{pmatrix}, \quad N(x) = 0.$$

$$G(x) = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}+x_n \\ x_n+x_1 \end{pmatrix}, \quad I(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad M(x) = -x,$$

41. Avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är linjär och uppfyller $F(u) = 2u$ och $F(v) = -v$, där $u = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ och $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Bestäm matrisen för F i standardbasen.

42. Avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ är bestämd av

$$F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad F\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ange F:s matris i standardbaserna.

43. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges i standardbasen av matrisen $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Avgör för vilka högerled $y \in \mathbb{R}^3$ som ekvationen $F(x) = y$ är lösbar.

44. Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som geometriskt beskrivs som projektion på planet $\pi = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\}$ längs linjen $l = \left[\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)\right]$.

a) Bestäm matrisen för F i standardbasen.

b) Bestäm matrisen i standardbasen för den linjära avbildning $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som geometriskt beskrivs som projektion på linjen l parallellt med planet π.

45. Visa att avbildningen $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x],\ f(x) \mapsto (x^2 + 1)f(x)$ är linjär.

46. Två baser $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ i ett vektorrum V är relaterade genom sambandet

$$\begin{cases} u_1 &= v_1 + v_2 + v_3, \\ u_2 &= v_1 - v_2 + v_3, \\ u_3 &= v_1 + v_2. \end{cases}$$

Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras genom $F(u_i) = v_i$ för $i = 1, 2, 3$. Bestäm matriserna $[F]_{\underline{u}}$ och $[F]_{\underline{v}\underline{u}}$.

47. Den linjära avbildningen $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges som rotation i positiv riktning med vinkeln $\alpha \in [0, 2\pi]$, och $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som projektion längs den andra standardbasvektorn på den första (så att $P(e_1) = e_1$, $P(e_2) = 0$). Bestäm matriserna för PR_α och $R_\alpha P$ i standardbasen.

48. Låt $u \in \mathbb{R}^3$ vara en vektor av längd ett (d v s $|u| = \sqrt{u \bullet u} = \sqrt{u^t u} = 1$), och låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen $F(x) = u \times x$.

a) Bestäm F:s matris i någon bas i $\mathbb{R}^3$.

b) Visa att $F^3 = -F$.

49. Låt V vara ett vektorrum, och $F : V \to V$ en linjär avbildning. Visa att de vektorer $v \in V$ som uppfyller $F(v) = -v$ bildar ett underrum av V.

50. De komplexa talen $\mathbb{C}$ utgör ett (reellt) vektorrum av dimension två. Visa att för varje komplext tal $z \in \mathbb{C}$ är avbildningen $\mathrm{m}_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ w \mapsto zw$ linjär. Bestäm matrisen för m_z i basen $(1, i)$.

51. Låt $D : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n,\ f \mapsto f'$ vara deriveringsavbildningen.

a) Visa att $D : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ är linjär.

b) Ange matrisen för D med avseende på någon valfri bas i $\mathbb{R}[x]_n$.

52. Låt $J : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_3$ vara avbildningen som ges av

$$J(f(x)) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt.$$

a) Visa att J är linjär.

b) Bestäm J:s matris med avseende på baserna $\underline{b}_2 = (1, x, x^2)$ och $\underline{b}_3 = (1, x, x^2, x^3)$ i $\mathbb{R}[x]_2$ respektive $\mathbb{R}[x]_3$.

53. Låt V och W vara vektorrum av dimension n respektive m, och $\underline{v}$ och $\underline{w}$ baser i V respektive W. Mängden $\mathcal{L}(V, W)$ av linjära avbildningar $V \to W$ är i sig själv ett vektorrum. Visa att avbildningen $\psi : \mathcal{L}(V, W) \to \mathbb{R}^{m \times n},\ F \mapsto [F]_{\underline{w}\,\underline{v}}$ är linjär och bijektiv.

54. Visa att två ändligt genererade vektorrum har samma dimension om och endast om det existerar en bijektiv linjär avbildning dem emellan.

5. Nollrum och värderum, dimensionssatsen

Exempel 6: Bestäm nollrum och värderum till avbildningen

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto Ax \qquad \text{där} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & -6 \\ -1 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Lösning: En vektor $x \in \mathbb{R}^4$ ligger i $\mathcal{N}(F)$ om och endast om $F(x) = Ax = 0$. Gaußelimination ger

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & -6 \\ -1 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{r2-2·r1} \\ \text{r3+r1}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{r3+r2} \\ -\frac{1}{5}\cdot\text{r2}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\overset{\text{r1-2·r2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekvationen $F(x) = 0$ har alltså lösningen (sätt $s = x_3$, $t = x_4$)

$$x = s \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_1} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_2}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

och därmed är (u_1, u_2) en bas i $\mathcal{N}(F)$.

Värderummet $\mathcal{V}(F)$ spänns upp av kolonnerna i A, som vi betecknar med $A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}, A_{\bullet 3}, A_{\bullet 4}$. Vi försöker finna en bas i $\mathcal{V}(F)$ bland dessa, genom att bestämma vilka av kolonnerna som kan skrivas som linjärkombinationer av de övriga. Ekvationssystemet

$$\lambda_1 A_{\bullet 1} + \lambda_2 A_{\bullet 2} + \lambda_3 A_{\bullet 3} + \lambda_4 A_{\bullet 4} = 0 \tag{5.1}$$

har totalmatris A, och samma beräkning som i fallet med nollrummet ovan ger

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Insättning av $(s, t) = (1, 0)$ ger relationen $A_{\bullet 1} - A_{\bullet 2} + A_{\bullet 3} = 0$, så i synnerhet gäller $A_{\bullet 3} \in [A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}]$. På samma sätt fås $2A_{\bullet 1} - A_{\bullet 2} + A_{\bullet 4} = 0$ och $A_{\bullet 4} \in [A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}]$ genom insättning av $(s, t) = (0, 1)$. Detta innebär att $\mathcal{V}(F) = [A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}]$.

För att inse att $A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}$ är linjärt oberoende kan man betrakta lösningar till ekvationen $\lambda_1 A_{\bullet 1} + \lambda_2 A_{\bullet 2} = 0$ eller, ekvivalent, lösningar till (5.1) som uppfyller $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Men $\lambda_3 = s$ och $\lambda_4 = t$, så enbart den triviala lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ återstår. Detta visar att $A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}$ är linjärt oberoende. $\square$

Anmärkning: Naturligtvis kan man se direkt att kolonnerna $A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}$ är linjärt oberoende. Poängen med beviset för linjärt oberoende ovan är att demonstrera en metod som fungerar för godtyckligt antal kolonner. I allmänhet gäller att om $I \subset \mathbb{N}$ är numren på de kolonner i den reducerade trappstegsmatrisen till A som innehåller pivotelement, så är $(A_{\bullet i})_{i \in I}$ en bas i kolonnrummet till A.

55. Låt $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som ges av

$$F(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 \\ 6x_1 - 9x_3 + 9x_4 \end{pmatrix}.$$

a) Avgör vilka av följande vektorer som ligger i värderummet $\mathcal{V}(F)$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Avgör vilka av följande vektorer som ligger i nollrummet $\mathcal{N}(F)$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

56. Bestäm en bas i nollrummet till avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, som i standardbaserna ges av matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

57. Avgör om följande avbildningar är linjära. I de fall de är det, bestäm baser i nollrum och värderum.

a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ F(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -2x_1 + 4x_3 \end{pmatrix}$,

b) $G : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \langle x, x \rangle$,

c) $H : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x) \mapsto \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f(0) \end{pmatrix}$.

58. Bestäm baser i nollrum och värderum för följande linjära avbildningar:

a) $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto Ax$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$;

b) $G : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_4,\ f(x) \mapsto \int_0^x f(t)\,dt - xf(x)$.

59. Konstruera, om möjligt, en linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sådan att $\mathcal{N}(F) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ och

a) $\mathcal{V}(F) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$, b) $\mathcal{V}(F) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

60. Låt $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ x \mapsto Ax$, där $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Bestäm en bas i $\mathcal{N}(F^2)$ och en bas i $\mathcal{N}(F) \cap \mathcal{V}(F)$.

61. Ge, genom att ange dess matris i standardbasen, exempel på en linjär avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ för vilken $\mathcal{N}(F) = \mathcal{V}(F) = [\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)]$.

62. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ definieras genom $F(x) = Ax$ för alla $x \in \mathbb{R}^4$, där $A \in \mathbb{R}^{5\times 4}$ har egenskapen att $Ax = 0$ endast om $x = 0$. Bestäm dimensionen hos $\mathcal{N}(F)$ och $\mathcal{V}(F)$.

63. Låt $F : V \to W$ vara en linjär avbildning mellan ändligt genererade vektorrum. Visa att

a) om F är injektiv, så är $\dim V \leqslant \dim W$,

b) om F är surjektiv, så är $\dim V \geqslant \dim W$.

64. Visa att nollrum och värderum till en linjär avbildning $F : V \to W$ är underrum av V respektive W.

65. Låt

$$\mathbb{R}^{2\times 2}_{sym} = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A^t = A\}$$

vara mängden av symmetriska 2×2-matriser, och $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}_{sym}$ den linjära avbildning som ges av

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 + x_4 \\ x_2 + x_4 & x_3 - x_1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en bas i $\mathcal{N}(F)$ och en bas i $\mathcal{V}(F)$.

66. a) Låt $F : V \to W$ vara en linjär avbildning mellan ändligt genererade vektorrum, och $U \subset W$ ett underrum. Visa att $U' = \{v \in V \mid F(v) \in U\}$ är ett underrum av V.

b) Bestäm en bas i U' om $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är avbildningen som i standardbasen ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{och} \quad U = \left[\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right)\right] \subset \mathbb{R}^3 .$$

6. Radrum, kolonnrum, rang

67. Låt $L \subset \mathbb{R}^3$ vara en linje genom origo, och $P \subset \mathbb{R}^3$ ett plan genom origo, sådana att $L \not\subset P$. Om A är matrisen i standardbasen för projektionen längs L på P, hur många linjärt oberoende rader har då A ?

68. Låt $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ och $\mathrm{rang}(A) = 3$.

a) Bestäm dimensionen hos lösningsrummet till ekvationen $Ax = 0$.

b) Avgör om ekvationen $Ax = b$ är lösbar för alla $b \in \mathbb{R}^4$.

c) Om ekvationen $Ax = b$ är lösbar, hur många linjärt oberoende lösningar finns det?

69. Låt V vara ett vektorrum, och $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ en bas i V. Den linjära avbildningen $F : V \to V$ har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

i basen $\underline{u}$.

a) Bestäm rangen av matrisen A.

b) För $V = \mathbb{R}[x]_2$ och $\underline{u} = (1, x, x^2)$, ange $F(x^2 - 1)$.

7. Skalärprodukt

70. Givet en ON-bas (e_1, e_2, e_3) i ett euklidiskt rum V, bestäm $|3e_1 + 4e_2 - 5e_3|$.

71. Två vektorer u och v i ett euklidiskt rum V uppfyller $|u| = 2$, $|v| = 4$, $|u+v| = 6$. Bestäm $\langle u, v\rangle$.

72. Låt V vara ett euklidiskt rum.

a) Visa, utan att använda Pythagoras sats (t. ex. genom att imitera beviset av denna), att
$$|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2$$
om u och v är ortogonala.

b) Visa *parallellogramlagen:*
$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2.$$

73. Tre vektorer u, v och w i ett euklidiskt rum uppfyller
$$2 \leqslant |u - v| \leqslant 3, \quad |v - w| \leqslant 1.$$
Visa att $1 \leqslant |u - w| \leqslant 4$.

74. Givet en vektor v i ett euklidiskt rum V, låt $v^\perp = \{u \in V \mid \langle u, v\rangle = 0\} \subset V$.

a) Visa att $v^\perp$ är ett underrum av V.

b) Vektorrummet $\mathbb{R}[x]_2$ är utrustatr med skalärprodukten
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx\,.$$
Bestäm en bas i $1^\perp \subset \mathbb{R}[x]_2$.

75. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Visa att $\langle x, y\rangle = x^t Ay$ är en skalärprodukt i $\mathbb{R}^2$.
Tips: Problemet är att visa att den är positivt definit.
Ledning: Kvadratkomplettera.

b) Bestäm det ortogonala komplementet till vektorn $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ med avseende på denna skalärprodukt.

76. a) Visa att

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

definierar en skalärprodukt på $\mathbb{R}[x]_2$.

b) Bestäm projektionen av $f(x) = x^2$ på underrummet $\mathbb{R}[x]_1 \subset \mathbb{R}[x]_2$ med avseende på denna skalärprodukt.

77. En skalärprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ är definerad på $\mathbb{R}^3$ på så sätt att

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bildar en ON-bas. Bestäm $\langle e_i, e_j\rangle$ för $i, j = 1, 2, 3$, där (e_1, e_2, e_3) är standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Ange en matris A sådan att $\langle x, y\rangle = x^t Ay$.

78. Visa att varje ortonormerad mängd i ett euklidiskt rum är linjärt oberoende.

8. Gram-Schmidts algoritm, ortogonal projektion

Exempel 7: Låt $U = \left[\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\1\\2\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3\\1\\3\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\-1 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{E}^4$.

a) Bestäm en ON-bas $\underline{b}$ i U.

b) Utvidga $\underline{b}$ till en bas i $\mathbb{E}^4$.

Lösning: a) Vi tillämpar Gram-Schmidts algoritm. Beteckna de vektorer som spänner upp U med $v_1, \ldots, v_4$. Den första vektorn i $\underline{b}$ fås genom att normalisera v_1:

$$b_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 1^2}} v_1 = \frac{1}{2} v_1 \, .$$

Därefter konstrueras från v_2 en vektor $\tilde{v}_2$ som är ortogonal mot b_1:

$$\tilde{v}_2 = v_2 - \langle v_2, b_1 \rangle b_1 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \begin{pmatrix} -1\\1\\2\\1 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -7\\1\\5\\1 \end{pmatrix}.$$

Andra ON-basvektorn fås genom att normalisera $\tilde{v}_2$:

$$b_2 = \frac{1}{\|\tilde{v}_2\|} \tilde{v}_2 = \frac{1}{2\sqrt{19}} \begin{pmatrix} -7\\1\\5\\1 \end{pmatrix}.$$

Analogt konstrueras $\tilde{v}_3 = v_3 - \langle v_3, b_1 \rangle b_1 - \langle v_3, b_2 \rangle b_2 = \begin{pmatrix} -3\\1\\3\\1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -7\\1\\5\\1 \end{pmatrix} = 0$. Detta betyder att $v_3 \in [b_1, b_2] = [v_1, v_2]$. Denna vektor kan alltså ignoreras. I nästa steg behandlas v_4:

$$\tilde{v}_4 = v_4 - \langle v_4, b_1 \rangle b_1 - \langle v_4, b_2 \rangle b_2 = \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\-1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} - \frac{5}{76} \begin{pmatrix} -7\\1\\5\\1 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 4\\13\\8\\25 \end{pmatrix};$$

$$b_3 = \frac{1}{874} \begin{pmatrix} 4\\13\\8\\25 \end{pmatrix}.$$

Vår ON-bas i U blir alltså $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{19}} \begin{pmatrix} -7\\1\\5\\1 \end{pmatrix}, \frac{1}{874} \begin{pmatrix} 4\\13\\8\\25 \end{pmatrix} \right)$.

b) Vi vet att $U = [\underline{b}] = [v_1, v_2, v_3, v_4] = [v_1, v_2, v_4]$. Vi söker en vektor $x \in \mathbb{E}^4$ som är ortogonal mot U, eller ekvivalent $\langle v_i, x \rangle = 0$, $i \in \{1, 2, 4\}$. Villkoret $\langle v_1, x \rangle = 0$ är ekvivalent med $1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 0$. När vi på samma sätt ställer upp ekvationer för $\langle v_2, x \rangle = 0$ och $\langle v_4, x \rangle = 0$ får vi ett homogent linjärt ekvationssystem med totalmatris

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{r2+r1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{r1-r3} \\ \text{r2-2}\cdot\text{r3}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{r2}\leftrightarrow\text{r3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{\text{r2-r3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Således är $x = t \begin{pmatrix} 2\\-5\\4\\-1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, och $b_4 = \frac{1}{\sqrt{46}} \begin{pmatrix} 2\\-5\\4\\-1 \end{pmatrix}$ är en enhetsvektor ortogonal mot varje vektor i U, i synnerhet mot b_1, b_2, b_3. Därmed är $\underline{b}' = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ en ON-bas i $\mathbb{E}^4$, som utvidgar $\underline{b}$. $\square$

Exempel 8: Låt $U = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}\right] \subset \mathbb{E}^4$ och $v = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \in \mathbb{E}^4$. Finn den vektor $u \in U$ som ligger närmast v. Ange avståndet mellan v och U.

Lösning: Den vektor i U som ligger närmast v är den ortogonala projektionen $u = P_U(v)$ av v på U. Vi beskriver två möjliga sätt att finna $P_U(v)$:

Variant 1: Om (u_1, u_2) är en ON-bas i U, så är $P_U(v) = \langle v, u_1\rangle u_1 + \langle v, u_2\rangle u_2$. Vi bestämmer en ON-bas med Gram-Schmidt: I första steget är $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$. Sedan tar vi projektionen av $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$ på det ortogonala komplementet till u_1:

$$\tilde{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Vi får $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$. Nu är

$$\begin{aligned} u = P_U(v) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} &+ \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{11}{5}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}15\\15\\22\\44\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Variant 2: Här utnyttjar vi att $P_U(v)$ är den unika vektor i U som uppfyller $(v - P_U(v)) \perp U$. Låt $v_1, v_2 \in U$ beteckna de två givna vektorer som spänner upp U. För en godtycklig vektor $u = x_1v_1 + x_2v_2 \in U$ gäller

$$(v-u) \perp U \Leftrightarrow \begin{cases} \langle u, v_1\rangle = \langle v, v_1\rangle \\ \langle u, v_2\rangle = \langle v, v_2\rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1\langle v_1, v_1\rangle + x_2\langle v_2, v_1\rangle = \langle v, v_1\rangle \\ x_1\langle v_1, v_2\rangle + x_2\langle v_2, v_2\rangle = \langle v, v_2\rangle \end{cases} \Leftrightarrow Ax = w$$

där $A = \begin{pmatrix}\langle v_1, v_1\rangle & \langle v_2, v_1\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle & \langle v_2, v_2\rangle\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 7\end{pmatrix}$ och $w = \begin{pmatrix}\langle v_1, v\rangle \\ \langle v, v_2\rangle\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\14\end{pmatrix}$. Löser man detta ekvationssystem får man $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-7\\22\end{pmatrix}$, d v s

$$P_U(v) = u = -\frac{7}{10}v_1 + \frac{22}{10}v_2 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}15\\15\\22\\44\end{pmatrix}.$$

Avståndet mellan v och U blir $|v - u| = |v - P_U(v)| = \frac{1}{10}\left|\begin{pmatrix}-5\\5\\8\\-4\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{10}\sqrt{130}$.

$\square$

79. Avgör huruvida nedanstående följder är ON-baser i respektive rum:

a) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ i $U = \{x \in \mathbb{E}^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \subset \mathbb{E}^3$.

b) $\left(\frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix}2\\\sqrt{5}-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix}1-\sqrt{5}\\2\end{pmatrix}\right)$ i $(\mathbb{R}^2, \langle\,\rangle)$, där $\langle x, y\rangle = x^t\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}y$.

c) $(1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}(6x^2 - 6x - 1))$ i $\mathbb{R}[x]_2$ utrustat med skalärprodukten $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

80. Bestäm koordinaterna för vektorn $v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ med avseende på ON-basen

$$\underline{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right) \quad \text{i} \quad \mathbb{E}^3.$$

81. Använd Gram-Schmidts metod för ortonormalisera vektorerna

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{E}^3 .$$

82. Finn en nollskild vektor i underrummet $U = \{x \in \mathbb{E}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \subset \mathbb{E}^4$ som är ortogonal mot $u = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$.

83. Bestäm en ON-bas i

a) $U = \left[\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{E}^4$.

b) $W = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{E}^4$.

84. Bestäm avståndet mellan punkten $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ och linjen $\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]$ i $\mathbb{E}^3$.

85. Låt $U = \left[\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{E}^3$.

a) Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $v = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ på U.

b) Finn avståndet mellan v och U.

86. Låt

$$M = \{x \in \mathbb{E}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\,,\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0\} \subset \mathbb{E}^4.$$

a) Bestäm en ON-bas i det ortogonala komplementet, $M^\perp$, till M.

b) Skriv vektorn $w = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ som en summa $w = u + v$, där $u \in M$ och $v \in M^\perp$.

87. Rummet $\mathbb{R}[x]_2$ förses med skalärprodukten

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx\,.$$

Bestäm med Gram-Schmidts metod, utgående från basen $(1, x, x^2)$, en ON-bas i $\mathbb{R}[x]_2$. Visa att

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2\rangle = \frac{(3a_0 + a_2)(3b_0 + b_2)}{9} + \frac{a_1b_1}{3} + \frac{4a_2b_2}{45}$$

Låt $U = \operatorname{span}\{1 + x - x^2\} \subset \mathbb{R}[x]_2$. Bestäm ON-baser i U och $U^\perp$.

9. Basbyte, ON-baser och isometrier

Exempel 9: Låt $S : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ vara speglingen i planet med normalvektor $u = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$. Bestäm matrisen för S i standardbasen.

Lösning: Avbildningen är definierad genom $S(u) = -u$ och $S(x) = x$ för $x \perp u$. Om v och w är två linjärt oberoende vektorer i $u^\perp$ så bildar $\underline{b} = (u, v, w)$ en bas i $\mathbb{E}^3$, med avseende på vilken $[S]_{\underline{b}} = \left(\begin{smallmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{smallmatrix}\right)$. Genom att multiplicera med basbytesmatrisen $T_{\underline{b}\,\underline{e}}$ från höger och $T_{\underline{e}\,\underline{b}}$ från vänster får vi matrisen i standardbasen $\underline{e}$ för S, enligt formeln

$$[S]_{\underline{e}} = T_{\underline{e}\,\underline{b}}[S]_{\underline{b}}T_{\underline{b}\,\underline{e}}.$$

Första steget blir att finna v och w. Två möjliga alternativ är $v = \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)$ och $w = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-1\end{smallmatrix}\right)$, men för att underlätta beräkningarna längre fram väljer vi istället två ortonormerade vektorer i $u^\perp$: $v = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)$ och $w = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\-2\end{smallmatrix}\right)$. På samma sätt normerar vi vektorn u och får en ON-bas $\underline{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\-2\end{smallmatrix}\right)\right)$ i vilken matrisen för S har den angivan formen. Basbytesmatrisen $T_{\underline{e}\,\underline{b}}$ har basvektorerna i $\underline{b}$ som kolonner, d v s

$$T_{\underline{e}\,\underline{b}} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\end{pmatrix}.$$

Den andra basbytenmatrisen fås som $T_{\underline{b}\,\underline{e}} = T_{\underline{e}\,\underline{b}}^{-1}$. Eftersom vi valde $\underline{b}$ till att vara en ON-bas så är $T_{\underline{e}\,\underline{b}}$ en ortogonal matris, och därmed gäller

$$T_{\underline{b}\,\underline{e}} = T_{\underline{e}\,\underline{b}}^{-1} = T_{\underline{e}\,\underline{b}}^{t} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6}\end{pmatrix}.$$

Nu är

$$\begin{aligned}[S]_{\underline{e}} &= T_{\underline{e}\,\underline{b}}[S]_{\underline{b}}T_{\underline{b}\,\underline{e}}\\ &= \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Alternativ lösning: Formeln för den ortogonala projektionen av $x \in \mathbb{E}^3$ på vektorn u är $P_u(x) = \frac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u = \frac{uu^t}{u^t u}x$. Speglingen S fås som $S(x) = x - 2P_u(x) =$

$\left(\mathbb{I}_3 - \frac{uu^t}{u^tu}\right)x$ (kontrollera själv att $u \mapsto -u$ och $v \mapsto v$ för $v \perp u$). Matrisen för S är alltså

$$[S]_{\underline{e}} = \mathbb{I}_3 - \frac{uu^t}{u^tu} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

88. Visa att $f_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $f_2 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $f_3 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ bildar en bas $\underline{f}$ i $\mathbb{R}^3$. Bestäm koordinaterna för $x = \left(\begin{smallmatrix} 14 \\ 5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ i $\underline{f}$.

89. Låt $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{E}^3$. Bestäm en ON-bas $\underline{b}$ i $\mathbb{E}^3$ sådan att $[u]_{\underline{b}} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{smallmatrix}\right)$.

90. Två baser $\underline{u}$ och $\underline{v}$ för ett vektorrum V är relaterade genom bassambandet

$$\begin{cases} v_1 = u_1 + u_2 + u_3, \\ v_2 = u_2 + u_3, \\ v_2 = u_3. \end{cases}$$

Bestäm det omvända bassambandet, och ange matriserna $T_{\underline{u}\,\underline{v}}$ och $T_{\underline{v}\,\underline{u}}$.

91. Vektorrummet V har en bas $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$. En ny bas $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ definieras genom

$$\begin{cases} b_1 = 2u_1 + u_2 + u_3, \\ b_2 = -u_1 + u_2 - u_3, \\ b_2 = 2u_1 + 3u_2 - u_3. \end{cases}$$

a) Bestäm basbytesmatriserna $T_{\underline{b}\,\underline{u}}$ och $T_{\underline{u}\,\underline{b}}$.

b) Bestäm koordinaterna för vektorn $v = 3e_1 - 2e_2 + e_3$ i basen $\underline{b}$ samt koordinaterna för vektorn $w = 3b_1 - 2b_2 + b_3$ i basen $\underline{u}$.

c) Bestäm koordinaterna för vektorn $w - v$ i vardera av baserna $\underline{b}$ och $\underline{u}$.

92. Två baser $\underline{u}$ och $\underline{v}$ i $\mathbb{R}^2$ uppfyller $T_{\underline{v}\,\underline{u}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Linjen $l \subset \mathbb{R}^2$ har ekvationen $x_1 + x_2 = 2$ i basen $\underline{u}$. Vilken är dess ekvation i $\underline{v}$?

93. Låt $u = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{E}^3$.

a) Bestäm en ON-bas $\underline{f}$ för $\mathbb{E}^3$ sådan att $[u]_{\underline{f}} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

b) Bestäm en bas $\underline{b}$ för $\mathbb{E}^3$ sådan att $[u]_{\underline{b}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

c) Bestäm basbytesmatrisen $T_{\underline{b}\,\underline{f}}$.

94. Låt $P_U : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$ vara den ortogonala projektionen av $\mathbb{E}^4$ på underrummet

$$U = \{x \in \mathbb{E}^4 \mid x_1 + x_2 + x_4 = 0\,,\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\}.$$

a) Finn en ON-bas i U.

b) Finn en ON-bas i $U^{\perp}$.

c) Finn matrisen för P_U i standardbasen i $\mathbb{E}^4$.

95. Låt $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ vara rotationen kring axeln $L = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ med vinkeln π. Bestäm F:s matris i standardbasen.

96. Låt $S : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ vara speglingen i normalplanet till $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestäm matrisen för S i standardbasen. Verifiera att matrisen är ortogonal.

97. Givet ortogonala matriser $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, visa att AB, A^tB, AB^t och A^tB^t också är ortogonala.

98. Givet en vektor $u \in V$ av längd ett, låt $F(v) = v - 2\langle v, u\rangle u$. Visa att

a) F är en linjär, isometrisk avbildning på V,

b) $\langle F(v), w\rangle = \langle v, F(w)\rangle$ för alla $v, w \in V$, samt

c) $F^2(v) = v$ för alla $v \in V$.

Tolka F geometriskt.

99. Avbildningen $F : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ ges i basen $\underline{b} = (1, x, x^2)$ av matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Bestäm dess matris i

a) basen $\big(1\,,\,(x-1)^2\,,\,(x+1)^2\big)$,

b) basen $\big(x-1\,,\,x(x-1)\,,\,x^2+1\big)$.

100. Låt $M = \{x \in \mathbb{E}^4 \mid x_1 + x_3 + x_4 = x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$, och $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Bestäm matriserna för P_M respektive $P_{M^\perp}$ i standardbasen.

b) Beräkna $P_M(u)$ och $P_{M^\perp}(u)$, samt avstånden från u till M respektive $M^\perp$.

c) Låt $F : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$ vara projektionen på M parallellt med underrummet $N = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$ och låt G vara projektionen på N parallellt med M. Bestäm matriserna i standardbasen för F respektive G.

d) Beräkna $F(u)$ och $G(u)$.

101. Vilka av följande avbildningar $\mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ är isometrier?

a) $F_1(x) = x$

b) $F_2(x) = Ax$, där $A = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$,

c) $F_3(x) = x + u \times x$, där $u \in \mathbb{E}^3$ är någon fix vektor.

d) $F_4(x) = Bx$, där $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

e) $F_5(x) = RS(x)$, där R är en rotation med vinkeln $\alpha \in [0, 2\pi]$ runt en axel $L = [u]$, $u \in \mathbb{E}^3 \setminus \{0\}$, och S är speglingen i normalplanet till en vektor $v \notin L$.

102. Låt $F : V \to V$ vara en isometri på ett tvådimensionellt euklidiskt rum V, sådan att $F(v) = v$ för någon nollskild vektor $v \in \mathbb{E}^2$. Visa att det finns en ON-bas i V sådan att F:s matris med avseende på denna bas är $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{smallmatrix}\right)$.

103. Visa att för varje isometri F på ett euklidiskt rum V gäller att $\det(F) = \pm 1$.

104. Låt $F : V \to V$ vara en linjär avbildning på ett ändligt genererat euklidiskt rum V. Visa att om F har en symmetrisk matris med avseende på någon ON-bas i V så är F:s matris med avseende på varje annan ON-bas också symmetrisk.

105. Låt $F : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ vara en isometri. Visa att F:s matris i standardbasen antingen är lika med

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{för något } \alpha \in [0, 2\pi].$$

106. Visa att varje isometrisk avbildning $F : V \to V$ på ett ändligt genererat euklidiskt rum är bijektiv.

107. Låt $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ vara en ortogonal matris. Visa att för alla $x, y \in \mathbb{E}^3$ gäller att $T(x \times y) = \pm(Tx \times Ty)$. För vilka T är $T(x \times y) = Tx \times Ty$?

10. Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Exempel 10: Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till den linjära avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som i standardbasen ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösning: Ett tal $\lambda \in \mathbb{R}$ är enligt definition ett egenvärde till F om $F(x) = \lambda x$ för någon nollskild vektor $x \in \mathbb{R}^3$. Vi har $F(x) = Ax$, och

$$F(x) = \lambda x \Leftrightarrow Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda \mathbb{I}_3)x = 0.$$

Det finns $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ så att sista villkoret är uppfyllt om och endast om $\det(A - \lambda \mathbb{I}_3) = 0$.

Vi undersöker för vilka $\lambda \in \mathbb{R}$ som $\det(A - \lambda \mathbb{I}_3) = 0$:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbb{I}_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-1-\lambda)^2 + 0 + 0 - (-1)(-1-\lambda) - (-1)(-1-\lambda) \\ &= (-1-\lambda)((1-\lambda)(-1-\lambda) + 2) = (-1-\lambda)(\lambda^2 + 1). \end{aligned}$$

Vi ser att $\lambda = -1$ är det enda nollstället till ovanstående uttryck, -1 är alltså det enda egenvärdet. Eftersom den algebraiska multipliciteten är ett, så har egenrummet till -1 dimension ett, och F är alltså inte diagonaliserbar.

Vi räknar ut egenvektorerna (d v s egenrummet) till $\lambda = -1$ genom att lösa ekvationssystemet $(A - (-1)\mathbb{I}_3)x = 0$:

$$(A - (-1)\mathbb{I}_3)x = (A + \mathbb{I}_3)x = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vilket ger lösningen $x = t \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Den enda vektorn $v = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ utgör alltså en bas i egenrummet $\mathcal{E}_{-1}(F)$, och varje annan egenvektor är en multipel av denna. $\square$

108. Verifiera att nedanstående vektorer är egenvektorer till de givna avbildningarna. Ange motsvarande egenvärden.

a) Vektorn $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ till avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{smallmatrix}\right) x$.

b) $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ till $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $G(x) = Ax$, där $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

c) $w = \left(\begin{smallmatrix} b \\ 1-a \end{smallmatrix}\right)$ till $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto Bx$, där $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, $a^2 + b^2 = 1$.

d) $u \in \mathbb{E}^n \setminus \{0\}$ till $\varphi : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, $\varphi(x) = x - \langle x, u \rangle u$.

e) e^{ax} (där $a \in \mathbb{R}$) till $D : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$, $f \mapsto f'$

109. Verifiera att följande tal är egenvärden till de givna avbildningarna. Finn motsvarande egenvektorer.

a) $2 + \sqrt{2}$ till $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) x$.

b) 3 till $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

c) -1 till avbildningen H från föregående uppgift.

d) b till avbildningen $J : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Bx$, där $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

e) n till $S : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$, $f(x) \mapsto xf'(x)$.

f) 0 till en godtycklig icke-inverterbar linjär avbildning $T : V \to V$.

110. Bestäm egenvärden och motsvarande egenvektorer till avbildningen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$, som i standardbasen ges av matrisen

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, *b)* $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, *d)* $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$.

111. Låt u och v vara linjärt oberoende egenvektorer, med egenvärden λ respektive μ, till en linjär avbildning F. För vilka värden på λ och μ är även $u + v$ en egenvektor, och vad är i så fall dess egenvärde?

112. Finn egenvärden och egenvektorer till A^5, då $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

113. Finn egenvärdena till matrisen $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. För vilka värden på a är A diagonaliserbar?

114. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har i standardbasen matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a & 2 & a-3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{där } a \in \mathbb{R}.$$

För vilka värden på konstanten a är avbildningen F diagonaliserbar? För varje sådant a, bestäm en bas i $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till F, och ange F:s matris med avseende på denna bas.

115. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges i standardbasen av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm en bas $\underline{b}$ för $\mathbb{R}^2$ bestående av egenvektorer till F, och egenvärdena till dessa.

b) Bestäm basbytesmatriserna mellan $\underline{b}$ och standardbasen, samt F matris med avseende på $\underline{b}$.

c) Bestäm A^n för alla $n \in \mathbb{Z}$.

116. Låt V vara ett vektorrum av dimension två. Visa att varje linjär avbildning $F : V \to V$ med negativ determinant har ett egenvärde.

117. Låt $F : V \to V$ vara en linjär avbildning, och A och B matriserna för F med avseende på två olika baser. Visa att A och B har samma sekularpolynom.

118. Rummet $\mathbb{R}^{2\times 2}$ har en bas $\underline{E} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, där

$$E_{11} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad E_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad E_{21} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad E_{22} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definieras genom $F(X) = BX - XB$, där $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

a) Bestäm matrisen för F med avseende på basen $\underline{E}$.

b) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till F.

119. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$ ges i standardbasen av matrisen

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Finn ett underrum $U \subset \mathbb{E}^4$ sådant att $F = P_U$.

b) Bestäm avståndet mellan vektorn $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)$ och U.

11. Spektralsatsen

Exempel 11: Låt

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Avgör om det finns en ortogonal matris T sådan att $D = TAT^{-1}$ är diagonal. Bestäm i så fall T och D.

Lösning: Att matrisen A är symmetrisk betyder avbildningen $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ som ges av A i standardbasen är symmetrisk. Enligt spektralsatsen finns nu en ON-bas $\underline{b}$ i $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till F. Med avseende på denna bas kommer F:s matris att vara diagonal, och basbytesmatrisen $T_{\underline{e}\,\underline{b}}$ ortogonal. Eftersom $[F]_{\underline{b}} = T_{\underline{b}\,\underline{e}} A T_{\underline{e}\,\underline{b}}$ så ger $D = [F]_{\underline{b}}$ och $T = T_{\underline{e}\,\underline{b}}$ de sökta matriserna.

Först bestämmer vi egenvärdena till F. En skalär $\lambda \in \mathbb{R}$ är ett egenvärde till F om och endast om $\det(A - \lambda \mathbb{I}_3) = 0$. Vi har

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{r1-2r2} \\ \text{r3-2r2}}}{=} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2+2\lambda & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2+2\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{r1/(1 + }\lambda\text{)} \\ \text{r3/(1 + }\lambda\text{)}}}{=} (1+\lambda)^2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2(8-\lambda).$$

Egenvärdena är alltså $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 8$.

Egenvektorer med egenvärde λ är de $x \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller $(A - \lambda\mathbb{I}_3)x = 0$. För det första egenvärdet, $\lambda_1 = -1$, gäller $A - \lambda_1 \mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, så $(A - \lambda_1\mathbb{I}_3)x = 0$ om och endast om $x = s\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ för $s, t \in \mathbb{R}$. Vektorerna $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ utgör alltså en bas i egenrummet $\mathcal{E}_{-1}(F)$.

Eftersom A (och därmed F) är symmetrisk, så vet vi att egenvektorer med egenvärde $\lambda_2 = 8$ måste vara ortogonala mot $\mathcal{E}_{-1}(F)$. Därav följer att $\mathcal{E}_8(F) = \mathcal{E}_{-1}(F)^\perp = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$ (man kan naturligtvis även bestämma egenvektorerna till λ_2 med standardmetoden). Vektorn $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. utgör en bas i $\mathcal{E}_8(F)$.

Nu är $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ en bas i $\mathbb{R}^3$, bestående av egenvektorer till F. Med Gram-Schmidts algoritm ortonormaliseras u_1, u_2, och vi får $b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, som alltså bildar en ON-bas i $\mathcal{E}_{-1}(F)$. Eftersom u_3 redan är ortogonal mot de andra basvektorerna räcker det att normalisera den: $b_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Nu är $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ en ON-bas i $\mathbb{E}^3$, bestående av egenvektorer till F. Matrisen för F i $\underline{b}$

är nu diagonal, med egenvärdena på diagonalen:

$$D = [F]_{\underline{b}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Basbytesmatrisen $T_{\underline{e}\,\underline{b}}$ fås genom att sätta ON-basvektorerna b_1, b_2, b_3 som kolonner:

$$T_{\underline{e}\,\underline{b}} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2\sqrt{5} \\ 6 & -2 & \sqrt{5} \\ 0 & 5 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

$\square$

120. Låt $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

a) Avgör om A är diagonaliserbar eller ej.

b) Bestäm egenvärden och egenvektorer till A.

121. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a & 2 & a-3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

För vilka värden på konstanten $a \in \mathbb{R}$ är avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$ diagonaliserbar? ON-diagonaliserbar? Ange i förekommande fall en bas i $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till F.

122. Den linjära operatorn F på $\mathbb{E}^3$ har i standardbasen $\underline{e}$ matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 2 & -a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) För vilka $a \in \mathbb{R}$ finns en ON-bas i $\mathbb{E}^3$ bestående av egenvektorer till F ? Ange i förekommande fall en sådan bas.

b) För vilka $a \in \mathbb{R}$ är F diagonaliserbar? Ange i förekommande fall en bas $\underline{f}$ i $\mathbb{E}^3$ bestående av egenvektorer till F, och basbytesmatrisen $T_{\underline{e}\,\underline{f}}$.

123. Låt $F : V \to V$ vara en linjär avbildning på ett euklidiskt rum V, $\underline{b}$ en ON-bas i V, och $A = [F]_{\underline{b}}$

a) Visa att F är en symmetrisk avbildning (d v s $\langle F(u), v\rangle = \langle u, F(v)\rangle$ för alla $u, v \in V$) om och endast om matrisen A är symmetrisk.

b) Visa att $A^t = -A$ om och endast om $\langle F(u), u\rangle = 0$ för alla $u \in V$.

124. Låt V vara ett euklidiskt rum av dimension minst två, och $x \in V$ en nollskild vektor. Den linjära operatorn $s_x : V \to V$ definieras genom $s_x(v) = v - 2\frac{\langle v,x\rangle}{\langle x,x\rangle} x$. Är s_x symmetrisk? Diagonaliserbar? Bestäm alla egenvärden till s_x.

12. Kvadratiska former, andragradsytor

Exempel 12: Funktionen $q : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2$ är en kvadratisk form på $\mathbb{E}^2$. Bestäm en ON-bas $\underline{f}$ i $\mathbb{E}^2$ och $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sådana att $q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ för $y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) = [x]_{\underline{f}}$.

Lösning: I standardbasen ges q av den symmetriska matrisen $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 5/2 \\ 5/2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, d v s $q(x) = x^t A x$ för alla $x \in \mathbb{E}^2$. Enligt spektralsatsen finns en ON-bas $\underline{f} = (f_1, f_2)$ bestående av egenvektorer till A. Med avseende på denna bas kommer $q(x) = x^t A x = y^t D y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, om $y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) = [x]_{\underline{f}}$, $D = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$ och $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ är egenvärdena tillhörande f_1 respektive f_2.

Egenvärden till A är nollställena till sekularpolynomet

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5/2 \\ 5/2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\frac{11}{2} - \lambda\right),$$

alltså $\lambda_1 = 1/2$ och $\lambda_2 = 11/2$.

Egenvektorer till λ_1 fås genom att lösa ekvationen $(A - \lambda_1 \mathbb{I}_2)x = 0$:

$$A - \lambda_1 \mathbb{I}_2 = A - \frac{1}{2}\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 5/2 & 5/2 \\ 5/2 & 5/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;; \quad x = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ för } t \in \mathbb{R}.$$

Eftersom A är symmetrisk är egenvektorer med egenvärde $\lambda_2 = 11/2$ ortogonala mot sådana med egenvärde $\lambda_1 = 1/2$, alltså är $\mathcal{E}_{\lambda_2}(A) = \left[\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right]^\perp = \left[\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right]$.

Sätt $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ och $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Nu är $\underline{f} = (f_1, f_2)$ ON-bas sådan att $q(x) = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{11}{2}y_2^2$ för $y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) = [x]_{\underline{f}}$. □

125. Vilka av följande uttryck för $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definierar kvadratiska former?

a) $q(x) = x_1^2 + x_1x_2 - x_3^2$,

b) $q(x) = 3x^t x$,

c) $q(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2$,

d) $q(x) = x_1^2 + x_2 - x_3^2$

e) $q(x) = x^t A x\,,$ där $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -9 \\ 0 & -9 & -1 \end{pmatrix}$,

f) $q(x) = x^t B x\,,$ där $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$,

g) $q(x) = -\langle x, x\rangle\,,$ där $\langle\cdot,\cdot\rangle$ är någon skalärprodukt på $\mathbb{R}^3$.

h) $q(x) = \langle x, y\rangle\,,$ där $\langle\cdot,\cdot\rangle$ är en skalärprodukt och $y \in \mathbb{R}^3$ en fix vektor.

126. Bestäm den symmetriska matris som i standardbasen svarar mot den kvadratiska formen $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, om

a) $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^3$,

b) $q(x) = x_1x_2 + 5x_1x_3 - 2x_2x_3$,

c) $q(x) = x^tAx$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

127. Den kvadratiska formen q på $\mathbb{E}^2$ ges av $q(x) = (4x_1 + 3x_2)x_2$. Bestäm en ON-bas $\underline{f} = (f_1, f_2)$ i $\mathbb{E}^2$ och $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ så att $q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, för $x = y_1f_1 + y_2f_2$.

128. Avgör om den kurva i $\mathbb{E}^2$ som ges av ekvationen $x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 = 1$ är en cirkel, ellips eller en hyperbel. Bestäm dess avstånd till origo, samt vilka punkter på kurvan som ligger närmast origo.

129. Bestäm signaturen hos den kvadratiska formen $q(x) = x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ på $\mathbb{R}^3$. Avgör typen av den yta i $\mathbb{E}^3$ som definieras genom $q(x) = 1$.

130. Bestäm typ, avstånd till origo och de punkter som ligger närmast origo på följande ytor i $\mathbb{E}^3$:

a) $Y_1 = \{x \in \mathbb{E}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 - 25x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 16x_2x_3 = 1\}$

b) $Y_2 = \{x \in \mathbb{E}^3 \mid x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 8x_2x_3 = 1\}$

c) $Y_3 = \{x \in \mathbb{E}^3 \mid x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 9x_3^2 = 7\}$

131. Om en ellipsoid har ekvationen

$$\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{y_3^2}{c^2} = 1$$

i ett ON-system (d v s y_1, y_2, y_3 är koordinater m.a.p. en ON-bas), så kallas y_1-, y_2- och y_3-axlarna för dess *huvudaxlar*. Bestäm huvudaxlarna för ellipsoiden

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{E}^3 \mid 5x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 1\}.$$

132. Visa att determinantavbildningen $\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det(A)$ är en kvadratisk form på $\mathbb{R}^{2\times 2}$, och bestäm dess signatur. Är $\det : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det(A)$ en kvadratisk form på $\mathbb{R}^{3\times 3}$?

133. Bestäm de delmängder av $\mathbb{R}$ som uppträder som värdemängder till kvadratiska former. Visa hur värdemängden till en kvadratisk form kan avläsas ur signaturen.

134. Låt n vara ett positivt heltal. Mängden K av alla kvadratiska former $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ utgör ett (ändligt genererat) underrum till vektorrummet av alla funktioner $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Betrakta avbildningen $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to K$, $A \mapsto Q_A$, där $Q_A(x) = x^tAx$ (här är alltså $x \in \mathbb{R}^n$ en kolonnvektor).

a) Visa att F är linjär och surjektiv.

b) Bestäm dimensionerna av K och $\mathcal{N}(F)$.

13. System av differentialekvationer

Exempel 13: Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y^{(3)} = 2y'' + y' - 2y, \\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = y''(0) = 1. \end{cases}$$

Lösning: Ekvationen kan skrivas som ett system av differentialekvationer, på matrisform

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}}_{Y}$$

(mer kompakt $Y' = AY$). Taktiken för att lösa detta system är att försöka diagonalisera matrisen A, för att därigenom dela upp systemet i tre enskilda första ordningens differentialekvationer, vilka kan lösas separat.

Sekularpolynomet till A är

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{k1+k2+k3}}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1-\lambda & -\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{r2-r1} \\ \text{r3-r1}}}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda),$$

så A har egenvärdena $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 2$, och är alltså diagonaliserbar. Egenvektorer till egenvärdet λ_i $(i = 1, 2, 3)$ är de nollskilda lösningarna till ekvationen $(A - \lambda_i \mathbb{I}_3)x = 0$. Uträkning ger $\mathcal{E}_{\lambda_i}(A) = [v_i]$, där

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dessa tre vektorer bildar en bas $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ i $\mathbb{R}^3$, och $T_{\underline{e}\,\underline{v}}^{-1} A T_{\underline{e}\,\underline{v}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$.

Om nu $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = [Y]_{\underline{v}} = T_{\underline{v}\,\underline{e}} Y = T_{\underline{e}\,\underline{v}}^{-1} Y$ så är

$$u' = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix} = T_{\underline{e}\,\underline{v}}^{-1} Y' = T_{\underline{e}\,\underline{v}}^{-1} A Y = T_{\underline{e}\,\underline{v}}^{-1} A T_{\underline{e}\,\underline{v}} u = Du$$

vilket betyder att

$$\begin{cases} u_1' = -u_1, \\ u_2' = u_2, \\ u_3' = 2u_2. \end{cases}$$

Dessa ekvationer har lösningarna $u_1(t) = c_1e^{-t}$, $u_2(t) = c_2e^t$ och $u_3(t) = c_3e^{2t}$ med godtyckliga parametrar $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Insatt i formeln $Y = T_{\underline{e}\,\underline{v}}u$ ger detta

$$\begin{cases} y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^t + c_3e^{2t}, \\ y'(t) = -c_1e^{-t} + c_2e^t + 2c_3e^{2t}, \\ y''(t) = c_1e^{-t} + c_2e^t + 4c_3e^{2t}. \end{cases}$$

Initialvillkoren $y(0) = 0$, $y'(0) = y''(0) = 1$ ger nu upphov till följande ekvation:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \end{pmatrix} = T_{\underline{e}\,\underline{v}} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_3(0) \end{pmatrix} = T_{\underline{e}\,\underline{v}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Med Gaußelimination får man fram $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

Vårt begynnelsevärdesproblem har alltså lösningen $y(t) = \frac{1}{3}\left(e^{2t} - e^{-t}\right)$. □

135. Lös systemet av differentialekvationer:

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ y_2' = 2y_1 + 4y_2 + 2y_3, \\ y_3' = 2y_1 + 2y_2 + 4y_3. \end{cases}$$

136. Lös nedanstående differentialekvationer/system av differentialekvationer. Prova att lägga till några olika begynnelsevärden, och se hur det påverkar lösningen.

i) $\begin{cases} y_1' = \sqrt{2}\,y_1 + y_2, \\ y_2' = y_1 + \sqrt{2}\,y_2. \end{cases}$

ii) $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = -y_1 + 2y_2 - y_3, \\ y_3' = -y_2 + 2y_3. \end{cases}$

iii) $y'' - 4y' + y = 0$.

137. Låt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vara diagonaliserbar med egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, och $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, där $y_1, \ldots, y_n$ är kontinuerligt deriverbara funktioner på $\mathbb{R}$. Visa att om $y' = Ay$ så är varje y_i en linjärkombination av funktionerna $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$.

138. Talföljden $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definieras rekursivt genom $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ och

$$a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2} \quad \text{för } n \geqslant 2\,.$$

Bestäm en sluten formel för a_n.

139. Lös nedanstående begynnelsevärdesproblem:

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{2}\,x(t) + y(t) + e^t \\ y'(t) = x(t) + \sqrt{2}\,y(t) + e^t \end{cases}, \quad x(0) = \sqrt{2}\,,\ y(0) = 0.$$

14. Blandade problem

140. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestäm baser i värderum och nollrum till avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$.

141. a) Ange en linjärt oberoende delmängd av

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

b) Utvidga den linjärt oberoende mängden från a) till en bas i $\mathbb{R}^4$.

142. a) Ge definitionen av en bas i ett linjärt rum.

b) Avgör för vilka värden på konstanten $a \in \mathbb{R}$ som

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$$

bildar en bas i $\mathbb{R}^3$.

c) Om $a = 0$ så är $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ från b) en bas i $\mathbb{R}^3$. Bestäm matrisen för koordinatbytet från standardbasen $\underline{e}$ till $\underline{v}$ (d v s den matris T som uppfyller $[x]_{\underline{v}} = T[x]_{\underline{e}}$ för alla $x \in \mathbb{R}^3$).

143. Låt

$$U = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{E}^4.$$

a) Bestäm en ON-bas $\underline{b}$ i U.

b) Utvidga $\underline{b}$ till en ON-bas i $\mathbb{E}^4$.

c) Visa att de vektorer du lade till i b) bildar en ON-bas i det ortogonala komplementet $U^\perp \subset \mathbb{E}^4$ till U.

144. Delrummet M av $\mathbb{R}^4$ spänns upp av vektorerna

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Ange en bas i M bland dessa vektorer. Bestäm M:s dimension.

b) Bestäm en ON-bas i M.

c) Bestäm projektionen av vektorn $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ på M.

145. Låt $E_{11} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $E_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $E_{21} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $E_{22} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

a) Visa att $\underline{E} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22},)$ är en bas i rummet $\mathbb{R}^{2\times 2}$ av 2×2-matriser.

b) Låt $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ vara den linjära avbildning som ges av $F(A) = \frac{1}{2}(A - A^t)$. Finn matrisen för F i basen $\underline{E}$.

c) Bestäm en bas i $\mathcal{N}(F)$ och en bas i $\mathcal{V}(F)$ (basvektorerna skall anges som 2×2-matriser, ej som koordinatvektorer).

146. a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till den avbildning som i standardbasen ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Lös systemet $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2, \\ y_3' = 2y_1 + 3y_3. \end{cases}$

147. Låt $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ vara speglingen i normalplanet till vektorn $u = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Bestäm F:s matris i standardbasen.

148. Låt

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Visa att avbildningen $F : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$, $x \mapsto Ax$ är en isometri.

b) Finn en ON-bas i $\mathbb{R}^3$ med avseende på skalärprodukten $\langle x, y\rangle = x^t By$.

c) Med skalärprodukten från b), bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ på $\left[\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right]^\perp \subset \mathbb{R}^3$.

149. Låt $\mathbb{R}^{n\times n}_{sym} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^t = A\}$ vara rummet av symmetriska $n\times n$-matriser.

a) Ge exempel på en linjär avbildning från $\mathbb{R}[x]_3$ till $\mathbb{R}^{2\times 2}_{sym}$.

b) Avgör om din avbildning är injektiv/surjektiv/bijektiv.

c) Ge ett exempel på en bijektiv linjär avbildning från $\mathbb{R}[x]_2$ till $\mathbb{R}^{2\times 2}_{sym}$.

150. En yta i $\mathbb{E}^3$ ges av ekvationen

$$4x_1^2 + 4x_2^2 + 7x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 2.$$

Bestäm ytans typ, minsta avstånd till origo, samt i vilka punkter detta avstånd antas.

151. a) Givet en symmetrisk $n\times n$-matris A, definiera en kvadratisk form $Q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ genom $Q_A(x) = x^t Ax$. Visa att

$$x^t Ay = \frac{1}{2}(Q_A(x+y) - Q_A(x) - Q_A(y))$$

för alla $x, y \in \mathbb{R}^n$.

b) Låt $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara en kvadratisk form. Visa att funktionen

$$(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x|y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

uppfyller följande villkor för alla $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

i) $(x|y) = (y|x)$,

ii) $(x+y|z) = (x|z) + (y|z)$,

iii) $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$.

c) Visa att $(\cdot|\cdot)$ är en skalärprodukt på $\mathbb{R}^n$ om och endast om $\operatorname{sign}(q) = (n, 0, 0)$.

152. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges i standardbasen av matrisen A. Bestäm egenvärdena till F, samt baser i motsvarande egenrum.

b) Bestäm signaturen av den kvadratiska formen $q(x) = x^t Ax$.

c) Lös följande system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + \sqrt{2}z(t) \\ y'(t) &= -y(t) \\ z'(t) &= \sqrt{2}x(t) \end{cases}, \quad x(0) = 0,\ \ y(0) = z(0) = 1.$$

153. En linjär avbildning $F : V \to V$ kallas *nilpotent* om $F^m = 0$ för något $m \in \mathbb{N}$. Bevisa följande påståenden:

a) Om F är en nilpotent avbildning så är $\mathcal{N}(F) \neq 0$.

b) En nilpotent avbildning har inga nollskilda egenvärden.

c) Om F:s matris i någon bas är övre triangulär, så är F nilpotent *(en matris kallas övre triangulär om samtliga element på och under diagonalen är lika med noll).*

d) Om $F - \lambda\mathbb{I}$ är nilpotent så är λ ett egenvärde till F *(här betecknar $\mathbb{I}$ identitetsavbildningen på V, d v s $\mathbb{I}(v) = v$ för alla $v \in V$).*

e) Om $F - \lambda\mathbb{I}$ är nilpotent så är λ det enda egenvärdet till F.

f) Om $F - \lambda\mathbb{I}$ är nilpotent, men inte noll, så är F inte diagonaliserbar.

154. Visa att det finns en unik inre produkt i $\mathbb{R}^2$ på formen

$$\langle x, y\rangle = c_{11}x_1y_1 + c_{12}x_1y_2 + c_{21}x_2y_1 + c_{22}x_2y_2,$$

sådan att $b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ och $b_2 = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ utgör en ON-bas i $\mathbb{R}^2$ med avseende på denna inre produkt. Bestäm även alla 2×2-matriser A sådana att $\langle x, y\rangle = (Ax)\bullet(Ay)$.

155. En linjär operator $F : V \to V$ på ett ändligt genererat vektorrum V har matrisen A i en bas $\underline{u}$ i V, och $A^2 = A$. Visa att F är diagonaliserbar (d v s att det finns en bas $\underline{f}$ i V bestående av egenvektorer till F), och bestäm egenvärdena. *Du kan först visa följande delsteg:*

a) $F(v) = v$ för alla $v \in \mathcal{V}(F)$.

b) $\mathcal{V}(F) \cap \mathcal{N}(F) = \{0\}$.

c) Om $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_l)$ är en bas i $\mathcal{V}(F)$ och $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_m)$ en bas i $\mathcal{N}(F)$ så är $\underline{b} = (v_1, \ldots, v_l, w_1, \ldots, w_m)$ en bas i V.

d) Basvektorerna i $\underline{b}$ är egenvektorer till F.

A. Facit

1. a) $(x, y, z) = (1 - 5t\,,\, t\,,\, 3t)$, där $t \in \mathbb{R}$.

b) $(w, x, y, z) = (-5s - t\,,\, s\,,\, 3s\,,\, t)$, $\quad s, t, \in \mathbb{R}$,

c) $(w, x, y, z) = (1 - 9t\,,\, -1 + t\,,\, 1 + 2t\,,\, 4t)$, $\quad t \in \mathbb{R}$,

d) $(w, x, y, z) = (-3 + 3s + t\,,\, s\,,\, t\,,\, 4 - 5s)$, $\quad s, t, \in \mathbb{R}$.

2. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 6 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\det A = x^2 + 3$, $\det B = 6$, $\det C = 0$, $\det D = x_1 x_2 \cdots x_n$, $\det E = (1 - a)^n$.

4. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $X = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -11 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 0 \\ -6 & 6 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

6. a) Matrisen S är inverterbar, eftersom $\det S \neq 0$.
$S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

b) $X = 4\mathbb{I}_2$

7. A är inverterbar om och endast om $x \notin \{-2, 1\}$. I detta fall är

$$A^{-1} = \frac{1}{(x+2)(x-1)} \begin{pmatrix} x+1 & -1 & -1 \\ -1 & x+1 & -1 \\ -1 & -1 & x+1 \end{pmatrix}.$$

12. a) och c) spänner upp $\mathbb{R}^3$, b) och d) gör det inte.

13. a) och b) är linjärt oberoende, c) och d) är linjärt beroende.

14. $b \neq -1$

15. $a = 2$

16. Inklusionen $U \subset W$ är äkta, ty $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U$. Däremot är $W = \mathbb{R}^3$.

17. Exempelvis $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vi har $M \cap N = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$.

18. a) $v \in N$, $w \notin N$,

b) $a = 1$,

c) $N = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

22. Endast mängden a) är en bas i $\mathbb{R}^3$.

23. Exempelvis $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

24. Varje $w \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller $19w_1 + w_2 - 7w_3 \neq 0$ fungerar.

26. Exempelvis $\underline{v} = (v_1, v_3)$ är en bas i U, och

$$[v_1]_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [v_2]_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [v_3]_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$[v_4]_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad [v_5]_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad [v_6]_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

27. De ligger i den linjära höljet av vektorerna $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, och måste därför vara linjärt beroende.

28. a) Varje par av de genererande vektorerna u_i utgör en bas i M.

b) $a = -1$

c) $[v]_{\underline{u}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i basen $\underline{u} = (u_1, u_2)$.

29. En bas i U är (exempelvis) (f_1, f_2, f_4). För att få en bas i hela $\mathbb{R}[x]_3$ kan man till exempel lägga till $g(x) = 1$.

32. $$\dim U = \begin{cases} 3 & \text{om } a \notin \{-6, 1\}, \\ 2 & \text{om } a = -6, \\ 1 & \text{om } a = 1. \end{cases}$$

33. En bas i $\mathbb{R}^X$ är exempelvis $\underline{f} = (f_i)_{i=1}^4$, där $f_i : X \to \mathbb{R}$ ges av

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x = i, \\ 0 & \text{om } x \neq i. \end{cases}$$

Koordinatvektorn för g blir då $[g]_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ -3/2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

38. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Kolonnerna i A är standardbasvektorernas bilder.

39. $F\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\quad F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\quad F\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

40. Avbildningarna G, I, L, M och N är linjära, F och H är det inte.

41. $[F]_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

43. Ekvationen är lösbar närhelst $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ uppfyller $2y_1 + y_2 - y_3 \neq 0$.

44. a) $[F]_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} en & massa \\ tal & har \end{pmatrix}$

b) $[G] = I - [F] = \ldots$

46. $[F]_{\underline{u}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $[F]_{\underline{vu}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

47. $[PR_\alpha]_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $[R_\alpha P]_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 \end{pmatrix}$.

48. Om $v, w \in \mathbb{R}^3$ har längd ett och är vinkelräta mot varandra och mot u (d v s $u \bullet v = 0$ etc.) så är $[F]_{(u,v,z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Eftersom $[F]^3_{(u,v,z)} = -[F]_{(u,v,z)}$ så är $F^3 = -F$.

50. Om $z = \lambda e^{i\alpha}$ så är $[\mathrm{m}_z]_{(1,i)} = \lambda \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

54. Låt V och W vara ändligt genererade vektorrum, och $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ en bas i V. Om $\varphi : V \to W$ är en bijektiv linjär avbildning så är $(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))$ en bas i W, och därför är $\dim W = n = \dim V$.

Om man istället antar att $\dim W = \dim V = n$, så finns en bas i W med n element, säg $\underline{w} = (w_1, \dots, w_n)$. Då definierar $\varphi(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$ en bijektiv linjär avbildning $\varphi : V \to W$.

55. a) Samtliga. b) v_1, ej v_2 och v_3.

56. $\mathcal{N}(F) = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$.

57. a) Ja. $\mathcal{N}(F) = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$, $\mathcal{V}(F) = \mathbb{R}^2$.

b) Nej. Homogenitetsvillkoret $G(\lambda x) = \lambda G(x)$ är exempelvis inte uppfyllt.

c) Ja. $\mathcal{N}(H) = [x^2, x^3]$, $\mathcal{V}(H) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$.

59. a) Det går inte. b) Exempelvis $F(x) = Ax$, där $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

60. I $\mathcal{N}(F^2)$ är (e_2, e_3) en bas, och e_1 är en bas i $\mathcal{N}(F) \cap \mathcal{V}(F)$.

61. Exempelvis $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

62. $\dim \mathcal{N}(F) = 0$, $\dim \mathcal{V}(F) = 4$.

66. a) Om $u, v \in U'$, $\lambda \in \mathbb{R}$ så får vi $F(\lambda u + v) = \lambda F(u) + F(v) \in U$ ty $F(u), F(v) \in U$ och U är ett delrum.

b) Då $x \in U' \Leftrightarrow F(x) = s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ för något $s \in \mathbb{R}$ följer att U' utgörs av lösningarna till det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 3 & -3 & s \\ 1 & -1 & 1 & 2s \\ 1 & -2 & 2 & 3s \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & -1 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Av den sista matrisen framgår att $U' = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = s, x_3 = x_2 + s\}$ vilket betyder att $U' = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

68. a) Lösningsrummet har dimension två.

b) Ekvationen är inte lösbar för alla b.

c) Två linjärt oberoende lösningar.

70. $|3e_1 + 4e_2 - 5e_3| = 5\sqrt{2}$

71. $\langle u, v\rangle = 8$

80. $v = \sqrt{2}u_1 + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3}u_3$

81. $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.$

82. Exempelvis $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$, eller $\frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-3\end{pmatrix}$. Varje icke-trivial linjärkombination av dessa två vektorer.

83. Exempelvis

$$\underline{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\5\\3\\-1\end{pmatrix}\right) \quad \text{i} \quad U,$$

$$\underline{c} = \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{11}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\3\end{pmatrix}\right) \quad \text{i} \quad W\,.$$

85. a) $P_U(v) = \frac{1}{21}\begin{pmatrix}5\\-11\\34\end{pmatrix}$,

b) avståndet är $\frac{8}{\sqrt{21}}$.

87. ON-basen i $\mathbb{R}[x]_2$ (som Gram-Schmidt frambringar) är $\left(1\,,\ \sqrt{3}\,x\,,\ \frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2-1)\right)$.
En ON-bas i U är $\left(\sqrt{\frac{15}{13}}\,(1+x-x^2)\right)$.
En ON-bas i $U^\perp$ är $\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\,(1-2x)\,,\ \frac{\sqrt{5}}{2}\,(1-3x^2)\right)$.

88. Koordinatvektorn är $[x]_{\underline{f}} = \begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$.

90.

$$\begin{cases} u_1 = v_1 - v_2, \\ u_2 = v_2 - v_3, \\ u_2 = v_3, \end{cases} \qquad T_{\underline{u}\,\underline{v}} = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}, \quad T_{\underline{v}\,\underline{u}} = \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$

91. a) $T_{\underline{b}\,\underline{u}} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{4}&\frac{5}{4}\\-1&1&1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}\end{pmatrix}, \quad T_{\underline{u}\,\underline{b}} = \begin{pmatrix}2&-1&2\\1&1&3\\1&-1&-1\end{pmatrix}$

b) $[v]_{\underline{b}} = \begin{pmatrix}-7/4\\-4\\5/4\end{pmatrix}, \quad [w]_{\underline{u}} = \begin{pmatrix}10\\4\\4\end{pmatrix}.$

c) $[w-v]_{\underline{b}} = \begin{pmatrix}19/4\\2\\-1/4\end{pmatrix}, \quad [w-v]_{\underline{u}} = \begin{pmatrix}7\\6\\3\end{pmatrix}.$

92. $y_2 = 2$.

93. a) Till exempel $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad f_2 = u, \quad f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}.$

b) Till exempel $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}.$

c) $T_{\underline{b}\,\underline{f}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 1 & 0 \\ 2\sqrt{\frac{2}{3}} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ i ovanstående fall.

94. a) Till exempel $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

b) Till exempel $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

c) $[P_U]_{\underline{e}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

95. $[F]_{\underline{e}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

96. $[F]_{\underline{e}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

98. Om $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ är en ON-bas i $u^\perp$, så är $\underline{b} = (v_1, \ldots, v_{n-1}, u)$ en ON-bas i V, $F(v_i) = v_i$ och $F(u) = -u$. Eftersom $\underline{b}$ avbildas på ON-basen $(v_1, \ldots, v_{n-1}, -u)$ så är F isometrisk (man verifierar direkt att den är linjär). Ekvationen b) kan man visa genom att sätta in $v = \alpha u + \tilde{v}$, $w = \beta u + \tilde{w}$, med $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ och $\tilde{v}, \tilde{w} \in u^\perp$, i höger- och vänsterled. Geometrisk är F speglingen i det ortogonala komplementet (normalplanet, i det tredimensionella fallet) till u.

99.

a) $\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

100. a)

$$[P_M]_{\underline{e}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ [P_{M^\perp}]_{\underline{e}} = \mathbb{I}_4 - [P]_{\underline{e}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $P_M(u) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $P_{M^\perp}(u) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$. Avstånden är $\frac{1}{3}\sqrt{219}$ respektive $\frac{1}{3}\sqrt{51}$.

c)

$$[F]_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & -4 \\ -4 & -1 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad [G]_{\underline{e}} = \mathbb{I}_4 - [F]_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

d) $F(u) = \begin{pmatrix} -26 \\ -36 \\ -5 \\ 31 \end{pmatrix}$, $G(u) = u - F(u) = \begin{pmatrix} 27 \\ 38 \\ 8 \\ -27 \end{pmatrix}$.

101. Avbildningarna F_1, F_2 och F_5, är isometrier.

107. $T(x\times y) = (Tx \times Ty)$ för alla $x, y \in \mathbb{E}^3$ om och endast om T är en ortogonal matris med $\det T = 1$.

108. Egenvärden: a) 3, b) 2, c) 1, d) $1 - |u|^2$, e) a.

109. Egenvektorer: a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -b \\ 1+a \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$ e) x^n f) $\mathcal{N}(T) \setminus \{0\}$

110. a) $\lambda_1 = 0$ och $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 5$ och $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) $\lambda_1 = -3$ och $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 5$ och $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $\lambda = 2$ och $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) $\lambda_{1,2} = a$ och $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = -a$ och $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

111. $\lambda = \mu$.

112. Egenvärden $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 32 = 2^5$, motsvarande egenvektorer $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

113. Egenvärdena är $a \pm \sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$. Matrisen är diagonaliserbar för alla $a \in \mathbb{R}$.

114. Avbildningen F är diagonaliserbar om och endast om $a = 1$. I detta fall utgör $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en bas av egenvektorer till F, och

$$[F]_{\underline{u}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

115. a) Exempelvis $\underline{b} = (b_1, b_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, med egenvärden $\lambda_1 = 1$ respektive $\lambda_2 = 3$.

b) $T_{\underline{e}\,\underline{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $T_{\underline{b}\,\underline{e}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $[F]_{\underline{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

c) $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n \\ 1-3^n & 1+3^n \end{pmatrix}$.

118. a) $[F]_{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Egenvärden $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ och $\lambda_3 = 1$. Baser i respektive egenrum är E_{21} i $\mathcal{E}_{-1}(F)$; $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ i $\mathcal{E}_0(F)$, samt $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ i $\mathcal{E}_1(F)$.

119. a) $U = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \subset \mathbb{E}^4$.

b) Avståndet är $\sqrt{130}/2$.

120. Ja, A är diagonaliserbar. Egenvärdena är $\lambda_1 = 1-\sqrt{5}$, $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_2 = 1+\sqrt{5}$, motsvarande egenvektorer $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$.

124. $\langle s_x(u), v\rangle = \langle u, v\rangle - 2\frac{\langle u,x\rangle\langle x,v\rangle}{\langle x,x\rangle} = \langle u, s_x(v)\rangle$, så s_x är symmetrisk och därmed (enligt spektralsatsen) diagonaliserbar. Dess egenvärden är -1 och 1.

125. a), b), e), f) och g) är kvadratiska former.

126. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

127. $\underline{f} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix} \right), \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \right)$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$.

129. Signaturen är $(3, 0, 0)$, ytan är en ellipsoid.

132. Signaturen är $(2, 2, 0)$. Determinantavbildningen är *inte* en kvadratisk form på $\mathbb{R}^{3\times 3}$ (ty $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$ om A är en 3×3-matris).

133. Om en kvadratisk form $q : V \to \mathbb{R}$ har signaturen $\operatorname{sign}(q) = (r, s, t)$ så är värdemängden

$$q(V) = \begin{cases} \mathbb{R}_{\geqslant 0} & \text{om } r > 0, s = 0, \\ \mathbb{R}_{\leqslant 0} & \text{om } r = 0, s > 0, \\ \mathbb{R} & \text{om } r, s > 0, \\ \{0\} & \text{om } r = s = 0. \end{cases}$$

134. Eftersom varje kvadratisk form q på $\mathbb{R}^n$ kan skrivas som $q = Q_A = F(A)$ för någon matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ så är $\mathcal{V}(F) = K$, d v s F är surjektiv.

Nollrummet $\mathcal{N}(F)$ består av alla antisymmetriska matriser (d v s matriser A sådana att $A^t = -A$), och således är $\dim \mathcal{N}(F) = \frac{n(n-1)}{2}$. Dimensionssatsen ger nu

$$\dim K = \dim \mathcal{V}(F) = \dim \mathbb{R}^{n\times n} - \dim \mathcal{N}(F) = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

136. i) $\begin{cases} y_1(t) = \lambda e^{(\sqrt{2}-1)t} + \mu e^{(\sqrt{2}+1)t}, \\ y_2(t) = -\lambda e^{(\sqrt{2}-1)t} + \mu e^{(\sqrt{2}+1)t}. \end{cases}$ ii) iii)

138. $a_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

139.

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(e^{(\sqrt{2}-1)t} + 3e^{(\sqrt{2}+1)t} - 2e^t \right), \\ y(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(-e^{(\sqrt{2}-1)t} + 3e^{(\sqrt{2}+1)t} - 2e^t \right). \end{cases}$$

142. a) En bas i ett vektorrum V är en följd vektorer $(v_1 \ldots, v_n)$ som är linjärt oberoende och spänner upp V.

b) $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$ om och endast om $a \neq \pm 1$.

c) $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

143. a) Exempelvis $\underline{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

b) Lägg till exempelvis $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

145. b) $[F]_{\underline{E}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
c) $(E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}$ är en bas i $\mathcal{N}(F)$, den enda vektorn $E_{12} - E_{21}$ utgör en bas i $\mathcal{V}(F)$.

146. a)

148. a) Avbildningen F är en isometri om och endast om matrisen A är ortogonal, d v s $T^tT = \mathbb{I}$.

b) Exempelvis $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

c) $P_{e_1^\perp}(v) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$

149. a) Det finns många. Nollavbildningen $\mathbf{0} : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}_{sym}$, $x \mapsto 0$ till exempel. Eller avbildningen $F(f(x)) = \begin{pmatrix} f(0) & f(1)\\ f(1) & f(2)\end{pmatrix}$.

b) Nollavbildningen är intetdera, F är surjektiv. Ingen linjär avbildning $\varphi : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}_{sym}$ kan vara injektiv, eftersom $\dim \mathbb{R}[x]_3 = 4 > 3 = \dim \mathbb{R}^{2\times 2}_{sym}$ implicerar $\mathcal{N}(\varphi) \neq \{0\}$.

152. a) Egenvärdena är $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 2$. Egenrummen

$$\mathcal{E}_{-1}(F) = \left[\begin{pmatrix}-1\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right], \quad \mathcal{E}_2(F) = \left[\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\1\end{pmatrix}\right].$$

b) $\operatorname{sign}(q) = (1, -1, -1)$.

c) $\begin{cases} x(t) = & \frac{\sqrt{2}}{3}\left(e^{2t} - e^{-t}\right)\\ y(t) = & e^{-t}\\ z(t) = & \frac{1}{3}\left(e^{2t} + 2e^{-t}\right)\end{cases}$